



# Identification électromagnétique de petites inclusions enfouies

Souhir Gdoura

## ► To cite this version:

Souhir Gdoura. Identification électromagnétique de petites inclusions enfouies. Electromagnétisme. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT: . tel-00651167v2

**HAL Id: tel-00651167**

**<https://theses.hal.science/tel-00651167v2>**

Submitted on 13 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE

*École Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes »*

Présentée par :

Souhir GDOURA

Sujet :

**Identification électromagnétique  
de petites inclusions enfouies**

Soutenue le 29 septembre 2008 devant les membres du jury :

Eric	Bonnetier	(rapporteur)
Marc	Saillard	(rapporteur)
Alexandre	Baussard	(membre)
Dominique	Lesselier	(directeur de thèse)
Lionel	Pichon	(président)
Julien	de Rosny	(membre)



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Dominique Lesselier, Directeur de Recherche au C.N.R.S., et ma co-directrice de thèse, Gaële Perrusson, Maître de Conférences, qui m'ont encadrée tout au long de ces trois années de thèse.

Je tiens à remercier Ekaterina Iakovleva qui m'a beaucoup aidée au démarrage de mes travaux de thèse. Elle a aussi su m'aider dans les moments difficiles. Je ne l'oublierai pas.

Je tiens aussi à remercier Habib Ammari pour les intéressantes discussions sur mon sujet de recherche qu'il m'a accordées ainsi que le post-doctorat dans le cadre de DIGITEO en projet commun avec le L2S qu'il m'a proposé à la fin de ma thèse.

Je remercie Patrick Chaumet de l'institut Fresnel pour m'avoir aidée dans ma thèse grâce à ses très utiles simulations CDM.

Je remercie également les rapporteurs Eric Bonnetier et Marc Saillard ainsi que les membres de jury : Alexandre Baussard, Lionel Pichon et Julien de Rosny pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.





*A mes parents, à mon mari et ma fille.*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Formule asymptotique du champ diffracté en espace libre</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Configuration . . . . .	12
1.3 Dyades de Green . . . . .	13
1.4 Formulation intégrale du champ diffracté . . . . .	15
1.5 Formule asymptotique du champ diffracté . . . . .	17
1.6 Tenseur de polarisation pour une inclusion ellipsoïdale . . . . .	18
1.6.1 Expression du tenseur de polarisation . . . . .	18
1.6.2 Comportement du tenseur de polarisation . . . . .	21
1.7 Tenseur de polarisation pour deux inclusions sphériques couplées . . . . .	24
1.7.1 Système de coordonnées bisphériques . . . . .	25
1.7.2 Configuration . . . . .	26
1.7.3 Expression du tenseur de polarisation . . . . .	26
1.7.4 Comportement des éléments du tenseur de polarisation . . . . .	29
1.8 Diffraction multiple entre des inclusions en utilisant le modèle de Foldy-Lax . . . . .	32
1.9 Effet du couplage . . . . .	33
<b>2 Formule asymptotique du champ diffracté en demi-espace</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Configuration . . . . .	39
2.3 Dyades de Green . . . . .	40
2.3.1 Dyade de Green $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$ . . . . .	40
2.3.2 Dyades de Green $\underline{\mathbf{G}}^{mm}$ et $\underline{\mathbf{G}}^{me}$ . . . . .	43
2.4 Intégrales de Sommerfeld . . . . .	45
2.5 Vérification par la dyade de Green en espace libre . . . . .	47
2.5.1 Comportement physique des intégrales de Sommerfeld . . . . .	47
2.6 Dyade de Green approchée . . . . .	48
2.6.1 Méthode “Revised Original Path” (ROP) . . . . .	49
2.6.2 Méthode “Steepest Descent Path” (SDP) . . . . .	50
2.6.3 Méthode “Leading Order Approximation” (LOA) . . . . .	52
2.7 Représentation du champ par la fomulation intégrale . . . . .	55
2.8 Formule asymptotique du champ diffracté . . . . .	57

2.9	Tenseur de polarisation pour une inclusion éloignée de l'interface . . . . .	58
2.10	Tenseur de polarisation pour une sphère proche de l'interface . . . . .	58
2.10.1	Expression du tenseur de polarisation . . . . .	58
2.10.2	Comportement des éléments du tenseur de polarisation . . . . .	60
2.10.3	Effet du couplage . . . . .	62
2.11	Interaction entre des inclusions en utilisant le modèle de Foldy-Lax . . . . .	63
2.11.1	Effet du couplage . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Comparaison à la méthode des dipôles couplés</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Champ diffracté par la méthode des dipôles couplés . . . . .	69
3.2.1	Méthode des dipôles couplés en espace libre . . . . .	69
3.2.2	Méthode des dipôles couplés en demi-espace . . . . .	71
3.3	Résultats numériques en espace libre . . . . .	72
3.3.1	Cas d'une sphère . . . . .	73
3.3.2	Cas d'un ellipsoïde . . . . .	74
3.3.3	Cas de deux sphères . . . . .	76
3.4	Résultats numériques en demi-espace . . . . .	77
3.4.1	Cas d'une sphère . . . . .	77
3.5	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Méthode d'imagerie</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Notion sur le retournement temporel . . . . .	81
4.3	Matrice de réponse multi-statique . . . . .	82
4.4	Méthode MUSIC . . . . .	86
4.5	Analyse des valeurs singulières et des vecteurs singuliers en espace libre . . . . .	87
4.6	Comportement des valeurs singulières . . . . .	89
4.7	Champ rétropropagé en espace libre . . . . .	93
4.7.1	Inclusion diélectrique . . . . .	94
4.7.2	Inclusion magnétique . . . . .	97
4.7.3	Inclusion diélectrique-magnétique . . . . .	98
4.8	Reconstruction en espace libre . . . . .	100
4.8.1	Inclusion sphérique diélectrique . . . . .	101
4.8.2	Inclusion magnétique . . . . .	107
4.8.3	Inclusion sphérique diélectrique et magnétique . . . . .	108
4.8.4	Inclusion ellipsoïdale . . . . .	109
4.8.5	Détermination de l'orientation de l'inclinaison d'un ellipsoïde . . . . .	110
4.8.6	Super-localisation pour le cas de deux sphères couplées . . . . .	114
4.9	Reconstructions des objets étendus . . . . .	120
4.10	Analyse des valeurs singulières et des vecteurs singuliers en demi-espace . . . . .	122
4.11	Comportement des valeurs singulières . . . . .	127
4.12	Reconstruction des inclusions en demi-espace . . . . .	129

---

4.12.1	Utilisation des dyades de Green « exactes » . . . . .	130
4.12.2	Utilisation des dyades de Green approchées . . . . .	132
<b>Conclusion</b>		<b>135</b>
<b>A Distribution des vecteurs singuliers</b>		<b>141</b>
A.1	Cas d'une inclusion diélectrique . . . . .	141
A.1.1	Données asymptotiques . . . . .	141
A.1.2	Données CDM . . . . .	142
A.2	Cas de deux inclusions diélectriques . . . . .	146
A.2.1	Données asymptotiques . . . . .	146
A.2.2	Données CDM . . . . .	147
<b>B Interface de l'application Matlab</b>		<b>153</b>
B.1	Configuration . . . . .	153
B.2	MUSIC . . . . .	154
B.3	Champ rétropropagé . . . . .	155
<b>Bibliographie</b>		<b>157</b>



# Introduction

Il existe plusieurs méthodes d'imagerie pour la détection et la caractérisation des objets diffracteurs. Certaines méthodes se contentent de déterminer le nombre de ces diffracteurs ainsi que leurs positions. D'autres méthodes vont jusqu'à estimer certaines de leurs caractéristiques telles que la perméabilité, la permittivité et, dans certains cas, l'orientation. Ces méthodes trouvent des applications dans plusieurs domaines, comme la détection de mines anti-personnels, la mise en évidence d'anomalies d'un sous-sol, le contrôle non destructif de matériaux et structures et l'imagerie médicale.

Le principe est d'éclairer de manière électromagnétique les objets diffracteurs grâce à un ensemble approprié de sondes émettrices (nous nous porterons dans ce travail sur le seul cas d'un réseau de dipôles électriques en tant qu'idéalisation d'un tel ensemble) puis de recueillir le champ que ces objets vont diffracter à l'aide du même ensemble de sondes ou d'un autre (à nouveau, nous considérerons un réseau de dipôles comme cet ensemble, confondu ou non avec le réseau émetteur). Il s'agit donc d'un problème inverse de diffraction, problème qui n'est d'ailleurs pas limité au cas d'une interaction électromagnétique, nombre d'applications d'intérêt impliquant l'usage d'ondes acoustiques ou élastiques.

Il existe, de manière schématique, deux classes de méthodes pour résoudre un tel problème inverse : les méthodes itératives et les méthodes non itératives, leur but ultime commun étant de construire une image des objets à partir des mesures du champ diffracté, ultime dans la mesure où l'on peut se borner à une détection de présence, une localisation, une estimation de forme, ou la détermination de paramètres géométriques ou électriques (acoustiques, élastiques) équivalents, toutes solutions utiles à un utilisateur potentiel dans son cadre de préoccupation. Les méthodes non itératives de fait tentent de fournir directement une telle caractérisation, naturellement via un appareil numérique convenable ; celles itératives impliquent une caractérisation progressive, en règle générale impliquant des résolutions successives du problème direct de diffraction pour des objets devenant (ce que l'on souhaite tout au moins) de plus en plus proche de ceux existant effectivement, l'écart étant pesé via une fonction de coût que l'on minimise (dans le cas non-itératif, si coût il y a, il permet par exemple de mesurer l'écart entre les champs diffractés par les objets reconstruits et les champs mesurés, mais ce critère est a posteriori et il n'y a pas minimisation progressive).

Pour notre part, nous nous intéressons à une méthode non itérative – employée à une seule



fréquence en régime harmonique – appelée « Multiple Signal Classification » (MUSIC) [25, 31] et mise en œuvre donc dans le domaine électromagnétique - ses développements n’y sont pas limités comme une abondante littérature le montre. Cette méthode n’est naturellement pas la seule, et on mentionnera en particulier la très étudiée « méthode d’échantillonnage linéaire » ou « linear sampling » telle que décrite notamment par [31], sachant que la relation entre la méthode MUSIC et la méthode d’échantillonnage linéaire a été considérée par [17] et que des liens rigoureux entre elles ont été mis en évidence par [6] dans le cas électrostatique – cette analyse amont élaborée ne rentre pas dans le cadre de ce travail de thèse, qui insiste essentiellement sur les expérimentations numériques dans un cadre certes rigoureux mais pour une bonne part induit d’autres travaux.

La méthode MUSIC est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$  dite de réponse multistatique (« Multi-Static Response » ou MSR dans la littérature anglo-saxonne) du système composé par le réseau émetteur, le réseau récepteur, les objets diffractants ainsi que le milieu (plus ou moins complexe) les contenant. Cette matrice MSR est, en fait, la matrice inter-éléments qui est construite en collectant le champ diffracté sur chacun des éléments récepteurs en réponse à l’excitation d’un seul émetteur, et ainsi de suite. Une telle matrice contient clairement une information sur la manière dont les objets diffractent les ondes, reste à mener une analyse permettant effectivement de caractériser ces objets. Signalons, par ailleurs, que dans le monde des systèmes automatiques, cette matrice MSR n’est autre que la matrice de transfert du système.

Notons que, pour obtenir une information complète sur les objets, il faut disposer le réseau de récepteurs tout autour des objets diffracteurs, mais que le travail mené aujourd’hui se borne à des situations particulièrement demanderesse dites d’aspect limité, pour lesquelles nous ne disposons que d’un seul réseau émetteur (plan, et normalement d’extension finie et composé d’un nombre de dipôles fini), et d’un seul réseau récepteur de constitution similaire, sauf quelques exceptions le même que le réseau émetteur, tous deux fixes dans l’espace. Le produit de cette matrice MSR et de sa matrice conjuguée transposée représente l’opérateur de retournement temporel (ORT) qui est à la base de la théorie du retournement temporel proposé par Fink et Prada [28] dans le domaine acoustique et étendue ensuite aux domaines élastiques et électromagnétiques - nous reviendrons ultérieurement sur ce dernier aspect.

Le principe du retournement temporel est simple et intuitif. Si l’on enregistre au niveau d’un réseau récepteur le champ reçu de la part d’une source ponctuelle, puis que l’on réémet de la part de ce même réseau l’onde enregistrée qui aura été temporellement inversée (le signal  $f(t)$  reçu sera émis selon  $f(-t)$  de telle sorte que les signaux reçus en dernier seront émis en premier et les signaux reçus en premier seront émis en dernier), alors l’on verra l’onde « traverser » le milieu et faire le chemin inverse pour converger à la position de la source ponctuelle. C’est le principe de fonctionnement des miroirs à retournement temporel. L’inversion du temps dans le domaine temporel (d’où vient le terme « retournement temporel ») se traduit dans le domaine fréquentiel par une conjugaison complexe d’où l’Opérateur de Retournement Temporel (ORT) défini par  $T = A^*A$ , le signe  $*$  désignant la trans-conjugaison. Les vecteurs propres de  $T$  sont les vecteurs singuliers de  $A$  et les valeurs propres de  $T$  sont les carrés des valeurs singulières de  $A$ .

Il a été montré que le nombre de valeurs singulières de cette matrice MSR dépend de la configuration du réseau et des caractéristiques des objets. Dans le domaine acoustique, Fink et Prada [28] ont montré que chaque diffracteur ponctuel, dans la seule hypothèse d'une variation de compressibilité possède une seule valeur singulière. Ensuite, Chambers et Gautesen [9] ont montré que chaque diffracteur physiquement ponctuel (c'est-à-dire ayant un volume non nul, contrairement aux objets ponctuels mathématiques qui possèdent un volume égal à zéro) peut posséder jusqu'à quatre valeurs singulières dont la valeur dominante traduit le moment monopolaire induit associé au contraste de compressibilité entre l'objet et le milieu et dont les trois autres valeurs traduisent les trois moments dipolaires associés aux contrastes de densité.

Le principe du retournement temporel a été repris dans le domaine électromagnétique d'abord en 2-D par Tortel *et al.* [53] dans le cas de sphères et de cylindres diélectriques et conducteurs illuminés par un réseau disposé tout autour de l'objet et ensuite par Ammari *et al.* [3] en 2-D en espace libre et en demi-espace. En 3-D, Chambers et Berryman [10] ont montré qu'une sphère centrée par rapport aux réseaux d'émetteurs/récepteurs possède, si elle est diélectrique, au maximum trois valeurs singulières et, si elle est parfaitement conductrice, jusqu'à six, ce qui veut déjà dire que par le nombre de valeurs singulières on peut atteindre une première caractérisation de l'objet sphérique à détecter. Notons que chaque état singulier correspond à une orientation orthogonale des moments dipolaires induits dans la sphère. (J'ai eu l'occasion d'étudier en détail les travaux de Chambers et Berryman concernant le cas d'un objet sphérique de petite taille lors de mon stage de Master de recherche en 2005.)

La première méthode d'imagerie issue de la théorie du retournement temporel a été l'imagerie par champ rétropropagé qui consiste à appliquer le vecteur singulier comme excitation du réseau émetteur, l'onde convergeant alors vers la position de l'objet. L'onde qui sera ensuite diffractée par l'objet va générer des tensions induites au niveau du réseau récepteur proportionnelles au conjugué de ce même vecteur singulier.

L'imagerie par champ rétropropagé s'avère donner une résolution longitudinale moins bonne que la résolution transversale pour un réseau situé d'un seul côté de l'objet diffractant [25] (contrairement au cas d'un réseau disposé tout autour de l'objet). Notons que cette résolution dépend de la géométrie du réseau, du nombre des éléments et de l'espacement entre ces éléments.

Dans le domaine acoustique, Devaney a exploité la décomposition de l'espace image de la matrice MSR en « sous-espace signal » et « sous-espace bruit » pour proposer une méthode MUSIC qui utilise la projection sur le sous-espace bruit. L'imagerie MUSIC assure (ou semble assurer) une meilleure résolution et ne nécessite pas un grand nombre d'émetteurs/récepteurs.

Cette méthode a été étendue au domaine électromagnétique 3-D par [3], ces auteurs ayant présenté une méthode d'imagerie de type MUSIC basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice MSR calculée à l'aide des dyades de Green du milieu et d'une formule asymptotique rigoureuse du champ électromagnétique diffracté par de petites inclusions ellipsoïdales diélectriques et/ou magnétiques placées dans un milieu homogène isotrope.

Mes travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des travaux menés entre le L2S, Gif-sur-Yvette, et le CMAP, Palaiseau, par H. Ammari, E. Iakovleva, D. Lesselier et G. Perrusson (on se référera aux publications [3] et [4], en sus de celles m'impliquant [37]), et ils ont en sus fait l'objet d'une coopération très utile avec l'Institut Fresnel, Marseille (la contribution de P. C. Chaumet sur les modèles exacts et simulations numériques de la diffraction par la méthode dite des dipôles couplés [16]), tandis que des éléments pertinents relatifs aux tenseurs de polarisation de deux sphères couplées ont résulté de la contribution « privée » de G. Dassios, ICHT-FORTH Patras. Ces travaux impliquent les items suivants :

- exploitation de la formule asymptotique du champ diffracté et de la notion de tenseur de polarisation associé à l'objet ;
- extension du travail à la configuration en demi-espace ;
- prise en compte du couplage entre les inclusions dans la configuration en espace libre et du couplage entre les inclusions et l'interface dans la configuration demi-espace grâce à une approche basée sur les coordonnées bisphériques et au modèle de Foldy-Lax ;
- validation de la méthode asymptotique par une méthode numérique de calcul du champ diffracté (coupled dipole method CDM) ;
- étude de l'effet d'un bruit gaussien additif ajouté à la matrice MSR ;
- imagerie MUSIC : détermination de l'angle d'inclinaison d'un objet ellipsoïdal ;
- étude de la super-résolution de l'imagerie MUSIC ;
- effet de l'utilisation de la dyade de Green approchée en demi-espace sur l'imagerie MUSIC ;
- (last but not least) amélioration du code Matlab déjà développé au sein du laboratoire pour prendre en compte les nouvelles configurations étudiées (demi-espace, couplage bisphérique, couplage Foldy-Lax, dyades de Green approchées, bruits additifs, ellipsoïde incliné)

Ce mémoire de thèse se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à la formule asymptotique du champ diffracté par de petites inclusions en espace libre. Cette formule asymptotique proposée par [4] ne prend pas en compte de manière native le couplage entre les inclusions (i.e., les inclusions sont considérées être assez éloignées les unes des autres). Cette formule n'est appropriée que pour des objets assez petits devant la longueur d'onde dans le milieu environnant à la fréquence d'opération et de faibles contrastes (de telle sorte que ces objets gardent une taille électrique équivalente suffisamment petite devant la longueur d'onde). Pour prendre en compte l'effet du couplage entre deux inclusions sphériques (ces deux sphères sont de rayons et de permittivités différents ou égaux), nous avons calculé un nouveau tenseur de polarisation proposé par G. Dassios *et al.* [24], ce tenseur étant traité par une méthode analytique basée sur la séparabilité de l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques. Pour le cas de plusieurs inclusions (plus que deux, mais aussi, pour comparaison, deux seulement), nous introduisons le modèle de diffraction multiple de Foldy-Lax [26, 58].

Le second chapitre traite de la formule asymptotique en configuration demi-espace [37] lorsque le réseau émetteurs/récepteurs est placé dans le milieu supérieur et que les inclusions sont placées dans le milieu d'enfouissement. De la même manière, la formule asymptotique originale suppose que les inclusions sont éloignées de l'interface de telle sorte que l'on puisse ignorer l'effet du couplage entre les inclusions et l'interface. La formule asymptotique en demi-espace n'est valide que pour de petites inclusions (taille suffisamment petite devant la longueur d'onde dans le milieu d'enfouissement).

Cette formule s'exprime en fonction de la partie transmise de la dyade de Green. Pour réduire le temps de calcul des dyades de Green, nous avons utilisé des méthodes approchées proposées dans la littérature par Chew et Cui [21, 20]. Pour prendre en compte le couplage entre l'interface et une inclusion sphérique enfouie, nous utilisons un tenseur de polarisation basé sur la même approche en coordonnées bisphériques. En effet, cela revient à considérer le cas de deux sphères lorsque le rayon de la seconde sphère tend vers l'infini, cette sphère se transformant alors en une interface plane. Pour considérer l'effet du couplage entre plusieurs inclusions et l'interface, on introduit le modèle de Foldy-Lax en prenant en compte la composante réfléchie par l'interface.

Ammari *et al.* [4] a précisé que la formule asymptotique ne s'applique que lorsque la taille de l'objet est assez petite devant la longueur d'onde. Peut-on appliquer la formule asymptotique si l'objet est une sphère de rayon  $\lambda/6$  ?  $\lambda/4$  ? Jusqu'à quel rayon pouvons-nous appliquer la formule asymptotique ? Afin de répondre au moins de manière partielle à ces questions très pratiques, nous comparons dans le troisième chapitre, pour différents rayons, le champ diffracté calculé par la formule asymptotique au champ diffracté calculé par la formule numérique « exacte » CDM (Coupled Dipole Method) grâce à des données fournies par P. C. Chaumet. La comparaison est effectuée sur des objets sphériques et ellipsoïdaux, en configuration espace libre et en configuration demi-espace, le cas de sphères couplées étant aussi traité.

Dans le quatrième chapitre, le fondement théorique de la méthode d'imagerie MUSIC est présenté. Nous appliquons cette méthode à partir de matrices MSR calculées par la formule asymptotique et par la méthode CDM. Les objets à détecter sont des objets sphériques ou ellipsoïdaux, diélectriques et/ou magnétiques en milieu espace libre ou en demi-espace. Nous présentons une étude sur la super-résolution de l'imagerie MUSIC. Une étude de la détermination de l'angle d'inclinaison d'un ellipsoïde centré par rapport à une ligne d'émetteurs/récepteurs est aussi menée. En effet, une fois la position de l'objet détectée par la méthode MUSIC, nous déplaçons une ligne d'antennes horizontalement de façon à la centrer au-dessus de lui. Nous réalisons une série de mesures en effectuant à chaque fois une rotation du réseau de dipôle de façon à balayer les angles possibles (de 0 à  $\pi$ ). Puis en étudiant la variation de la valeur singulière dominante de la matrice MSR en fonction de l'angle de rotation du réseau, nous arrivons à déterminer l'angle d'inclinaison de l'ellipsoïde enfoui.



# Chapitre 1

## Formule asymptotique du champ diffracté en espace libre

### 1.1 Introduction

Le but de nos travaux est de détecter de petits objets enfouis à partir de la mesure du champ électromagnétique qu'ils diffractent à une fréquence prescrite. Pour formuler le problème direct, il nous faut donc déterminer l'expression analytique du champ diffracté par ces petits objets.

Notons, d'ores et déjà que nous ne nous intéressons qu'à de petits objets diffracteurs dont la taille est faible devant la longueur d'onde. D'ailleurs, il n'existe pas de formule générale de calcul du champ électromagnétique diffracté par un objet de taille et de forme quelconques. En effet, pour de tels objets on ne pourra qu'utiliser des méthodes numériques telles que la méthode CDM (Coupled Dipole Method) qui se base sur une discrétisation de ces objets en des cubes élémentaires. Nous reviendrons sur cette méthode en détail dans le chapitre 3. De telles méthodes « numériques » permettent, certes, de calculer le champ diffracté, mais ne nous permettent pas de formuler « analytiquement » notre problème direct.

Intéressons nous donc aux petits objets et aussi, pour simplifier, uniquement aux objets homogènes et isotropes. Par contre, les formes de ces objets pourront être quelconques. Dans ce cas, lorsque la taille des objets tend vers zéro, des développements asymptotiques du champ électromagnétique diffracté existent dont la formule proposée par Ammari *et al.* [1] qui est donnée à l'ordre « taille puissance 4 ». Cette formule s'exprime, comme on peut s'y attendre, en fonction des dyades de Green et des moments dipolaires induits en chaque objet.

Logiquement, lorsque l'on parle de détection d'objets enfouis, on s'attend à une configuration en demi-espace. Cependant, nous avons préféré consacrer ce premier chapitre à la configuration en espace libre afin de développer les principes de la méthode asymptotique choisie loin des complexités

apportées par la configuration en demi-espace. L'étude dans un milieu demi-espace sera développée dans le chapitre suivant (chapitre 2).

Dans ce premier chapitre, nous commençons par présenter la configuration du système étudié. Ensuite nous introduisons les dyades de Green qui régissent la propagation du champ électromagnétique diffracté en espace libre. Puis, nous montrons comment, à partir des équations de Maxwell, on arrive à la formulation intégrale du champ diffracté qui sera la base de la formule asymptotique du champ diffracté que nous allons étudier en détail par la suite. En effet, nous allons considérer la notion de tenseur de polarisation qui permet de caractériser un objet diffractant. Nous nous intéresserons plus précisément aux objets ellipsoïdaux dont la sphère est un cas particulier. Pour prendre en compte la diffraction multiple entre plusieurs objets, nous allons d'abord introduire un tenseur de polarisation pour deux inclusions sphériques couplées et ensuite appliquer le modèle dit de Foldy-Lax. Nous terminons le chapitre par une étude de l'effet du couplage entre les objets diffractants.

## 1.2 Configuration

Considérons une collection de  $m$  petites inclusions,  $D_j = \mathbf{x}_j + \alpha V_j$ ,  $j = 1 \dots m$ , où  $V_j$  est l'espace borné de  $\mathbb{R}^3$  représentant le volume de l'inclusion  $j$ ,  $\mathbf{x}_j$  est la position de son centre et  $\alpha$  est un facteur d'échelle pour toutes les inclusions ( $\alpha \ll 1$ ). Chaque inclusion  $j$  a ses propres permittivité  $\varepsilon_j$  et perméabilité  $\mu_j$ . Ces  $m$  inclusions se trouvent dans un espace libre homogène ayant une permittivité  $\varepsilon_0$  et une perméabilité  $\mu_0$ . L'ensemble des inclusions forme  $\mathcal{I}_\alpha = \sum_{j=1}^m \mathbf{x}_j + \alpha V_j$  (voir Fig. 1.1)

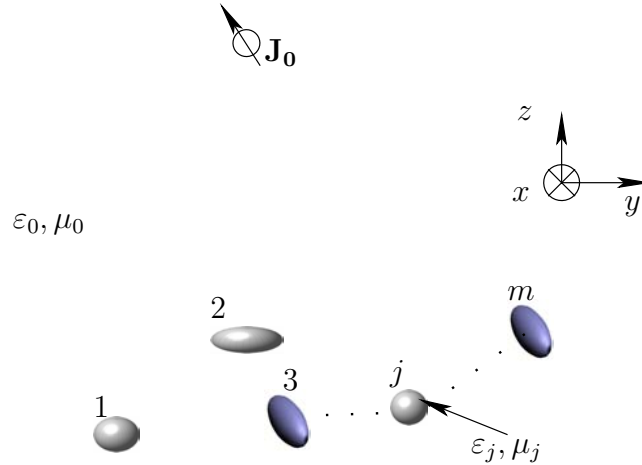


FIGURE 1.1 – Configuration en espace libre

Considérons les deux fonctions suivantes :

$$\mu_\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_j & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{I}_\alpha, \\ \mu_0 & \text{si } \mathbf{r} \notin \mathcal{I}_\alpha, \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_j & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{I}_\alpha, \\ \varepsilon_0 & \text{si } \mathbf{r} \notin \mathcal{I}_\alpha. \end{cases}$$

Soit  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  le nombre d'onde du milieu, où  $\omega = 2\pi f$  avec  $f$  la fréquence de travail. La dépendance temporelle, choisie en  $e^{-i\omega t}$ , sera sous-entendue par la suite.

### 1.3 Dyades de Green

La propagation des ondes électromagnétiques d'un dipôle source à tout point de l'espace est formalisée grâce aux dyades de Green. On distingue quatre types de dyades.

Le tenseur de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la dyade électrique-électrique permettant de déterminer le champ électrique rayonné par une source électrique située à la position  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  observé au point  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Nous considérons que cette source est un dipôle infinitésimal orienté selon la direction  $\vec{\beta}$  et parcouru par un courant élémentaire  $Il$ . La dyade de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la solution de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.1)$$

où  $\underline{\mathbf{I}}$  est la matrice identité  $3 \times 3$ , et  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la fonction de Dirac.

La dyade de Green ne présente pas de divergence pour tout point  $\mathbf{r}$  différent de  $\mathbf{r}'$ . Elle est donnée ici (en espace libre) par :

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[ \underline{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

où  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  est la fonction de Green qui correspond physiquement au rayonnement d'une source ponctuelle située en  $\mathbf{r}'$  mesuré au point d'observation  $\mathbf{r}$  de l'espace libre. Cette fonction vérifie l'équation de Helmholtz  $(\Delta + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

La dyade de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\underline{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^t) + \left( \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \frac{1}{k^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) (\underline{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^t) \right), \quad (1.2)$$

où  $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^t/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ , et  $t$  est l'opérateur transposé.

Les deux termes  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$  et  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  dominent lorsque le rayonnement est en champ proche (lorsque  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1$ ) alors que l'autre terme  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  correspond au rayonnement dominant d'un dipôle électrique en champ lointain (lorsque  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg 1$ ). Donc l'expression (1.2) devient en champ lointain :

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \Delta(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (1.3)$$

où  $\Delta(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{a} = -\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a})$ ,  $r$  est l'amplitude du vecteur  $\mathbf{r}$  et  $\hat{\mathbf{r}}$  est le vecteur unitaire dirigé selon  $\mathbf{r}$ . Pour plus de précision,

$$\Delta(\hat{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} \quad (1.4)$$



avec  $\underline{\Delta} = \underline{\Delta}^t$ .

Une fois  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  déterminée, le champ électrique incident  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  se calcule par :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \vec{\beta} Il.$$

De manière analogue, **la dyade de Green magnétique-magnétique**  $\underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  permet de calculer en tout point d'observation  $\mathbf{r}$  le champ magnétique créé par une source d'origine magnétique située en  $\mathbf{r}'$ . Si l'on souhaite déterminer le champ magnétique dû à une source d'origine électrique, il est nécessaire d'utiliser **une dyade de Green du type magnétique-électrique**  $\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , qui peut être aussi donnée par :

$$\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Lambda(\hat{\mathbf{r}}),$$

où  $\Lambda(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{a} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}$ .

En champ lointain ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg 1$ ),  $\underline{\mathbf{G}}^{me}$  prend l'expression suivante

$$\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \Lambda(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (1.5)$$

Pour plus de précision,

$$\Lambda(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{r}_z & \hat{r}_y \\ \hat{r}_z & 0 & -\hat{r}_x \\ -\hat{r}_y & \hat{r}_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

avec  $\Lambda = -\Lambda^t$ .

$\underline{\mathbf{G}}^{me}$  permet alors de déterminer le champ magnétique incident  $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$  qui est donné par :

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \vec{\beta} Il. \quad (1.7)$$

Par le principe de dualité, nous obtenons **la dyade de Green électrique-magnétique**  $\underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  qui nous permet de déterminer le champ électrique rayonné par une source magnétique.

La dyade de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  vérifie aussi les conditions de réciprocité suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= [\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^t, \\ \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= [\nabla' \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^t. \end{aligned}$$

où  $\nabla'$  est la dérivation par rapport au point source  $\mathbf{r}'$ . Par le principe de dualité nous obtenons les dyades de Green magnétique-magnétique  $\underline{\mathbf{G}}^{mm}$  et électrique-magnétique  $\underline{\mathbf{G}}^{em}$  qui sont données

par les expressions suivantes :

$$\underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1.8)$$

$$\underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1.9)$$

et nous avons aussi par dualité les correspondances suivantes :

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H},$$

$$\mu \rightarrow -\varepsilon,$$

$$\varepsilon \rightarrow -\mu,$$

$$J \rightarrow -M$$

$$M \rightarrow -J.$$

## 1.4 Formulation intégrale du champ diffracté

Les champs électromagnétiques incidents (en espace libre, sans prendre en compte la présence des inclusions)  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont les solutions des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0, \\ \nabla \times \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{J}_0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E}_0 - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_0] = 0, \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{H}_0 - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0] = 0. \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  les champs électromagnétiques en présence des inclusions  $\mathcal{I}_\alpha$ . Ces champs vérifient les équations de Maxwell et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_\alpha \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{J}_0, \\ \nu \times \mathbf{E} \text{ et } \nu \times \mathbf{H} \text{ sont continus sur } \partial D_j, \\ \nu \cdot (\varepsilon_\alpha \mathbf{E})^+ - \nu \cdot (\varepsilon_\alpha \mathbf{E})^- = 0 \text{ sur } \partial D_j, \\ \nu \cdot (\mu_\alpha \mathbf{H})^+ - \nu \cdot (\mu_\alpha \mathbf{H})^- = 0 \text{ sur } \partial D_j, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E} - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}] = 0, \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{H} - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}] = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{J}_0$  est la densité de courant et  $\nu$  le vecteur normal orienté vers l'extérieur de la surface  $\partial D_j$  ; les signes “+” et “-” indiquent les limites à l'extérieur et à l'intérieur de la surface  $\partial D_j$ .

A partir de (1.10), le champ électrique satisfait :

$$\begin{cases} \nabla \times \mu_\alpha^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon_\alpha \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J}_0, \\ \nu \times \mathbf{H} \text{ est continu sur } \partial D_j, \\ \nu \cdot (\varepsilon_\alpha \mathbf{E})^+ - \nu \cdot (\varepsilon_\alpha \mathbf{E})^- = 0 \text{ sur } \partial D_j, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E} - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}] = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Soit  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  et soit  $V$  un domaine qui contient l'ensemble des inclusions. En multipliant la première équation dans (1.11) par  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}$  et en intégrant par partie sur le volume  $V$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_V d\mathbf{r}' \left[ \nabla' \times \frac{1}{\mu_\alpha} \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') - \omega^2 \varepsilon_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right] \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} \\ &= \oint_{\partial V} d\sigma \nu \cdot \frac{1}{\mu_0} \left[ \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ \left( \frac{1}{\mu_\alpha} - \frac{1}{\mu_0} \right) \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \omega^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_V d\mathbf{r}' i\omega \mu_0 \mathbf{J}_0(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de rayonnement satisfaite par  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  et  $\mathbf{E}$ , on constate que le premier terme est égal à zéro. D'où la formulation intégrale :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ -\mu_0 \left( \frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_0} \right) \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_j - \varepsilon_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right]. \end{aligned}$$

Nous prenons le transposé de l'équation et, en notant que  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ -i\omega \mu_0 \mu_j \left( \frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_0} \right) \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_j - \varepsilon_0) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned}$$

La différence entre le champ total en présence des inclusions  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et le champ en absence des inclusions  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  représente le champ diffracté. C'est l'équation intégrale dite de Lippmann-Schwinger :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ i\omega (\mu_j - \mu_0) \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_j - \varepsilon_0) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nous avons déjà présenté dans le paragraphe précédent les dyades de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  et  $\underline{\mathbf{G}}^{me}$ .

Nous obtenons par dualité l'expression du champ magnétique diffracté comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' & \left[ -i\omega (\varepsilon_j - \varepsilon_0) \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right. \\ & \left. + \omega^2 \varepsilon_0 (\mu_j - \mu_0) \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

## 1.5 Formule asymptotique du champ diffracté

A partir de la formulation intégrale de Lippmann-Schwinger, Ammari *et al.* [1], ont établi la formule asymptotique du champ électrique diffracté par une collection de petites inclusions. Cette formule n'est valable que lorsque la taille de chaque inclusion est suffisamment petite devant la longueur d'onde ( $\alpha \ll \lambda$ ). La formule asymptotique du champ électrique diffracté  $\mathbf{E} - \mathbf{E}_0$  donnée au premier ordre (terme  $\alpha^3$ ) est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \alpha^3 \sum_{j=1}^m & \left[ i\omega \mu_0 \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j \right) \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j) \right. \\ & \left. + k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j \right) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \right] + O(\alpha^4), \end{aligned} \quad (1.14)$$

Par dualité, nous obtenons la formule asymptotique du champ magnétique diffracté  $\mathbf{H} - \mathbf{H}_0$  au même ordre qui est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \alpha^3 \sum_{j=1}^m & \left[ -i\omega \varepsilon_0 \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j \right) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \right. \\ & \left. + k^2 \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j \right) \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j) \right] + O(\alpha^4), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\text{où} \quad \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{q_j}{q_0}; V_j \right) = \frac{(q_j - q_0)}{q_0} \underline{\mathbf{M}} \left( \frac{q_j}{q_0}; V_j \right). \quad (1.16)$$

Dans ce qui précède,  $\underline{\mathbf{M}}_g(q_j/q_0; V_j)$  (i.e.,  $q_j/q_0 = \varepsilon_j/\varepsilon_0; \mu_j/\mu_0$ ) est le tenseur de polarisation qui contient une information sur le volume  $V_j$  et le contraste  $q_j/q_0$  entre l'inclusion  $j$  et le milieu extérieur, et  $\underline{\mathbf{M}}(q_j/q_0; V_j)$  est le tenseur de polarisation. A partir de l'expression (1.14), nous pouvons obtenir le champ diffracté par un conducteur électrique parfait (PEC) en faisant tendre la permittivité de l'inclusion vers l'infini ( $\varepsilon_j \rightarrow \infty$ ) et sa perméabilité vers zéro ( $\mu_j \rightarrow 0$ ) et par dualité nous obtenons le cas d'un conducteur magnétique parfait (PMC).

L'expression (1.14) nous donne le champ diffracté à une précision de l'ordre  $\alpha^4$ . Notons que lorsque l'inclusion  $V_j$  est symétrique par rapport à son centre, le terme puissance  $\alpha^4$  s'annule et

nous obtenons une précision de l'ordre  $\alpha^5$  [4]. C'est le cas, entre autre, des inclusions sphériques et ellipsoïdales que nous allons traiter par la suite.

## 1.6 Tenseur de polarisation pour une inclusion ellipsoïdale

Nous avons vu que la formule asymptotique (1.14) se base sur le tenseur de polarisation pour caractériser la façon dont l'objet diffracte l'onde incidente. Dans cette section, nous nous intéressons d'abord au calcul de ce tenseur pour des objets ellipsoïdaux et ensuite étudions le comportement des éléments de ce tenseur en fonction de la forme et des caractéristiques électromagnétiques de l'ellipsoïde. Notons que cette étude concerne le cas d'un ellipsoïde isolé, c'est-à-dire non couplé à un autre objet. Ce dernier cas sera étudié un peu plus loin (section 1.7).

### 1.6.1 Expression du tenseur de polarisation

Ici nous allons décrire le tenseur de polarisation d'une inclusion de forme ellipsoïdale isolée dans l'espace. Ce tenseur de polarisation dépend du volume et des propriétés électromagnétiques de l'inclusion.

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  les semi-axes de l'ellipsoïde, tels que  $a \geq b \geq c > 0$  et  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  les vecteurs unitaires du repère de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  correspondant à ces trois semi-axes centré sur le centre de l'ellipsoïde.

L'équation de l'ellipsoïde est la suivante :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

Le tenseur de polarisation pour une inclusion ellipsoïdale est défini par [5] :

$$\underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{q_j}{q_0}; V_j \right) = \underline{\mathbf{R}}^t \begin{bmatrix} m_{ja} & 0 & 0 \\ 0 & m_{jb} & 0 \\ 0 & 0 & m_{jc} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{R}} |V_j|, \quad (1.17)$$

où  $|V_j| = 4\pi abc/3$  est le volume de l'ellipsoïde et  $\underline{\mathbf{R}}$  est une matrice de rotation de dimension  $3 \times 3$  qui permet de traiter le cas d'un ellipsoïde incliné grâce à un changement de repère. En effet, ce changement de repère s'effectue au moyen de trois rotations : une première ( $\phi$  angle de précession) autour de l'axe  $z$  amène l'axe  $x$  sur l'intersection entre les plans  $x-y$  des deux repères. Une seconde rotation ( $\psi$  angle de rotation propre) autour de ce nouvel axe  $x$  amène le plan  $x-y$  de l'ancien repère sur celui du nouveau repère. Une dernière rotation ( $\theta$  angle de nutation), autour du nouvel axe  $z$ , amène l'axe des  $x$  sur celui du nouveau repère.

Si l'ellipsoïde est incliné (i.e., les semi-axes ne coïncident pas avec les axes du repère) selon les angles d'Euler (voir Fig. 1.2)  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $\phi \in [-\pi; \pi]$  et  $\psi \in [-\pi; \pi]$ , la matrice de rotation prend

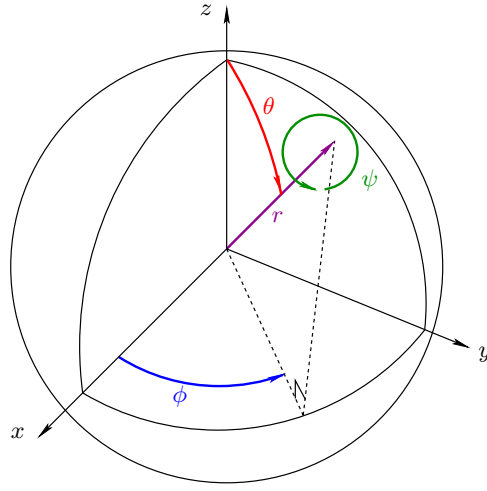


FIGURE 1.2 – Les angles de rotation

alors cette forme :

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Dans (1.17), les coefficients  $m_{jl}, l \in \{a, b, c\}$ , sont donnés par

$$m_{jl} = \frac{q_j - q_0}{q_0 + L_l(q_j - q_0)}, \quad (1.19)$$

où les  $L_l$  sont les coefficients de dépolarisation ([23] et [2]) :

$$L_l = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+l^2)\sqrt{(x+a^2)}\sqrt{(x+b^2)}\sqrt{(x+c^2)}}, l \in \{a, b, c\} \text{ et } \sum_{l \in \{a, b, c\}} L_l = 1. \quad (1.20)$$

Pour un ellipsoïde de révolution aplati  $a = b > c$  (voir Fig. 1.3), les coefficients de dépolarisation sont donnés par [14] :

$$\begin{aligned} L_a = L_b &= \frac{a^2 c}{2(a^2 - c^2)} \left( I_0^1 - \frac{c}{a^2} \right), \\ L_c &= -\frac{a^2 c}{a^2 - c^2} \left( I_0^1 - \frac{1}{c} \right), \\ \text{où } I_0^1 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{a - \sqrt{a^2 - c^2}}} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé  $a > b = c$  (voir Fig. 1.3), les coefficients de

dépolarisation s'écrivent [14] :

$$\begin{aligned}
 L_a &= \frac{ab^2}{a^2 - b^2} \left( I_0^1 - \frac{1}{a} \right), \\
 L_b &= L_c = -\frac{ab^2}{2(a^2 - b^2)} \left( I_0^1 - \frac{a}{b^2} \right), \\
 \text{où } I_0^1 &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Dans le cas particulier d'un ellipsoïde très allongé ou aiguille ( $a \gg b = c$ ),  $L_a$  tend vers zéro et

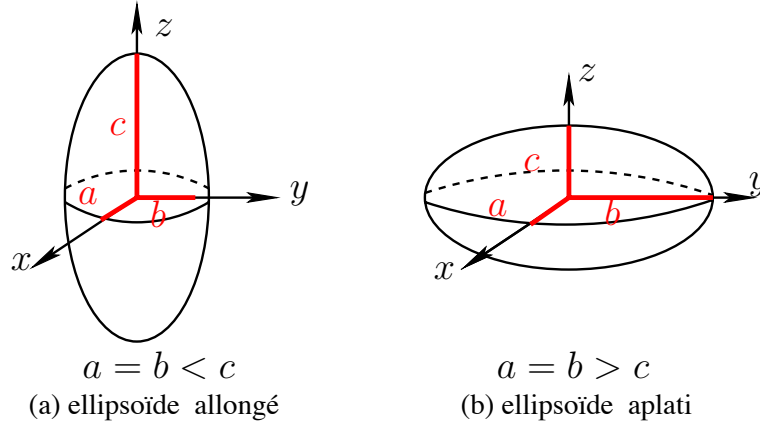


FIGURE 1.3 – Ellipsoïdes

$L_{b,c}$  tend vers  $1/2$ . Si nous considérons un disque ( $a = b \gg c$ ),  $L_c$  tend vers 1 et  $L_{a,b}$  sont proches de zéro. Et si  $a = b = c$  l'ellipsoïde devient une sphère avec ( $L_l = 1/3$ ), et l'expression du tenseur de polarisation se simplifie (voir Tab. 1.1).

	disque ( $a = b \gg c$ )	aiguille ( $a \gg b = c$ )	sphère ( $a = b = c$ )
Coefficient de dépolarisation semi-axe a	$L_a \rightarrow 0$	$L_a \rightarrow 0$	$L_a = 1/3$
Coefficient de dépolarisation semi-axe b	$L_b \rightarrow 0$	$L_b \rightarrow 1/2$	$L_b = 1/3$
Coefficient de dépolarisation semi-axe c	$L_c \rightarrow 1$	$L_c \rightarrow 1/2$	$L_c = 1/3$

TABLE 1.1 – Coefficients de dépolarisation pour les cas limites

### Cas d'une sphère

Nous venons de voir que le coefficient du tenseur de dépolarisation pour une sphère est  $L_l = 1/3$ , donc l'expression du tenseur de polarisation  $\underline{\mathbf{M}}_g(q_j/q_0; V_j)$  pour une inclusion sphérique de rayon  $a$  devient comme suit :

$$\underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{q_j}{q_0}; V_j \right) = \frac{3(q_j - q_0)}{2q_0 + q_j} |V_j| \mathbf{I}, \tag{1.23}$$

avec  $|V_j| = 4\pi a^3/3$ .

La formule asymptotique du champ diffracté (1.14) devient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 4\pi a^3 \left[ i\omega \mu_0 \frac{(\mu_j - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu_j} \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j) \right. \\ \left. + k^2 \frac{(\varepsilon_j - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_j} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \right] + O(a^5). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le champ diffracté par une sphère donné par cette formule est équivalent à un rayonnement d'un dipôle électrique et/ou magnétique créé par les moments dipolaires électriques  $\mathbf{p}$  et/ou magnétiques  $\mathbf{m}$  induits. Ces moments se traduisent par les expressions suivantes

$$\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_j - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_j} |V_j| \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = 3\mu_0 \frac{(\mu_j - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu_j} |V_j| \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j).$$

### Rayon équivalent pour une sphère diélectrique

Dans le cas d'une sphère diélectrique, le moment électrique induit et le tenseur de polarisation ne dépendent que du volume (donc du rayon) et de la permittivité relative de la sphère. Notons ici que deux sphères de rayons différents et de permittivités différentes peuvent avoir le même tenseur de polarisation et donc diffracter le champ électrique de la même manière. En traçant les courbes  $a^3 = C(2\varepsilon_0 + \varepsilon_j)/(\varepsilon_j - \varepsilon_0)$  pour différents  $C$ , on obtient une abaque des rayons équivalents, où  $a$  est le rayon de la sphère et  $\varepsilon_j$  est la permittivité de la sphère. Voir cette abaque sur la figure 1.4.

Pour bien comprendre cette notion de rayon équivalent, prenons un exemple numérique : les deux points  $A$  ( $\varepsilon_j/\varepsilon_0 = 2$ ,  $a = 0,04$ ) et  $B$  ( $\varepsilon_j/\varepsilon_0 = 5$ ,  $a = 0,03$  m) sont sur la même courbe de l'abaque. C'est-à-dire que ces deux sphères ont le même comportement de diffraction par rapport à une onde incidente de longueur d'onde  $\lambda \gg 0,04$  m.

### Rayon équivalent pour une sphère magnétique

De manière analogue, dans le cas de sphères magnétiques, on peut avoir deux sphères de rayons et de perméabilités différentes et pourtant elles créent le même champ diffracté. En effet, si l'on dessine sur le plan d'abscisse  $\mu_j/\mu_0$  (la perméabilité relative) et d'ordonnées  $a$  (rayon de la sphère) les courbes  $a^3 = C(2\mu_0 + \mu_j)/(\mu_j - \mu_0)$ , nous obtenons une abaque des rayons équivalents pour une sphère magnétique.

## 1.6.2 Comportement du tenseur de polarisation

Nous avons vu l'expression analytique du tenseur de polarisation d'un ellipsoïde et ses cas limites. Ici, nous allons étudier le comportement de ces éléments par analyse numérique.



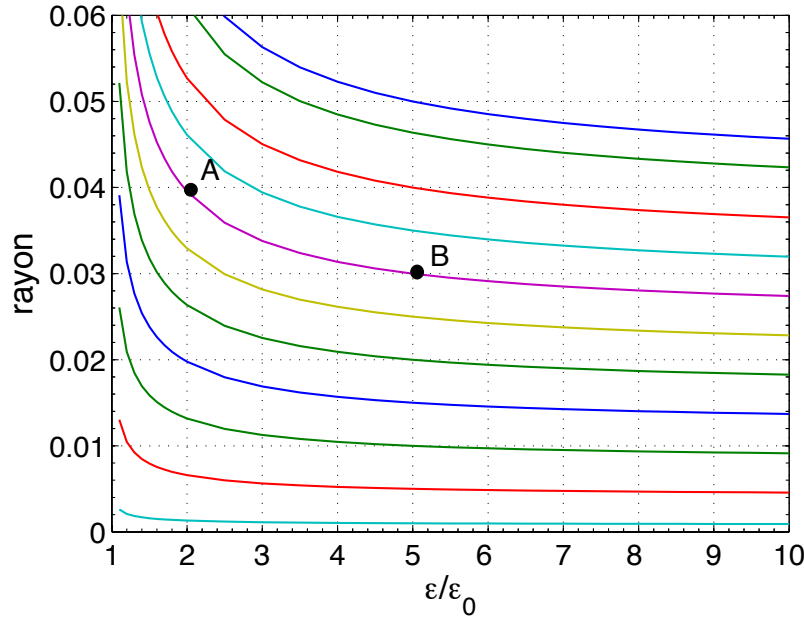


FIGURE 1.4 – Rayons équivalents pour une sphère diélectrique

Tout d'abord, nous traçons les éléments du tenseur de polarisation pour le cas d'un ellipsoïde allongé ou aplati comparés à ceux d'une sphère en fonction de la permittivité relative  $\varepsilon/\varepsilon_0$ .

La figure 1.5 nous montre que dans le cas  $0 < \varepsilon/\varepsilon_0 < 1$ , les éléments  $m_a = m_b$  du tenseur de polarisation normalisé d'un ellipsoïde allongé de semi-axes (1 m ; 1 m ; 10 m) sont supérieurs et l'élément  $m_c$  est inférieur à ceux d'une sphère de semi-axes (1 m ; 1 m ; 1 m). Pour  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1$ , les éléments du tenseur sont égaux et valent 0 ce qui est normal, puisque dans ce cas  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , l'ellipsoïde fait partie de l'espace libre et n'est plus diffractant. Et pour  $\varepsilon/\varepsilon_0 > 1$ , les éléments du tenseur de polarisation d'un ellipsoïde allongé gardent le même comportement et deviennent négatifs.

Pour le cas d'un ellipsoïde aplati de semi-axes (1 m ; 1 m ; 0,1 m) (voir Fig. 1.6), le comportement s'inverse par rapport à un ellipsoïde allongé. En effet, c'est l'élément  $m_c$  qui devient inférieur à la valeur  $m$  du tenseur de polarisation d'une sphère, tandis que les éléments  $m_a$  et  $m_b$  deviennent supérieurs à  $m$ .

Les deux figures précédentes présentaient le comportement des éléments du tenseur de polarisation lorsque l'on change la permittivité relative de l'inclusion. Maintenant nous nous intéressons à l'effet de la forme de l'ellipsoïde sur le tenseur de polarisation. En effet la figure 1.7 montre le comportement de ces éléments en fonction du caractère aplati, sphère ou allongé d'un ellipsoïde ayant une permittivité relative  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 3$ , en fixant les semi-axes  $a = b = 1$  et en faisant varier le semi-axe  $c$ . On trouve évidemment que pour le cas  $a = b = c$  (cas sphère), les trois éléments du tenseur ont la même valeur. Plus l'ellipsoïde est aplati ( $c/a < 1$ ) plus sa forme s'approche de celle d'un disque et plus  $m_a$  et  $m_b$  sont supérieurs à  $m$ . Ce comportement s'inverse lorsque l'on part de  $c = a$  vers les  $c > a$  vers le cas limite d'une aiguille. Notons d'ores et déjà que ces courbes vont nous permettre d'interpréter le comportement du tenseur de polarisation de deux sphères couplées

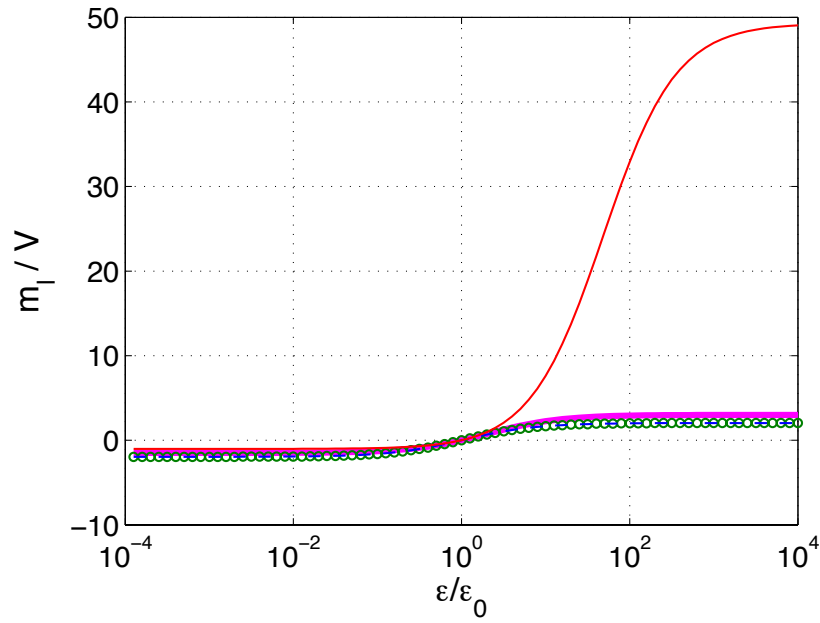


FIGURE 1.5 – Les éléments diagonaux du tenseur de polarisation  $m_l/V$  en fonction de  $\varepsilon/\varepsilon_0$  pour le cas d'un ellipsoïde allongé de semi-axes (1 m ; 1 m ; 10 m), ( - - ) l'élément  $m_a$ , (o o) l'élément  $m_b$ , (— fin) l'élément  $m_c$  du tenseur de polarisation et (— fort ), l'élément  $m_a = m_b = m_c$  pour le cas d'une sphère de semi-axes (1 m ; 1 m ; 1 m). Echelle logarithmique des abscisses  $\varepsilon/\varepsilon_0$ .

plus loin dans ce chapitre (section 1.7).

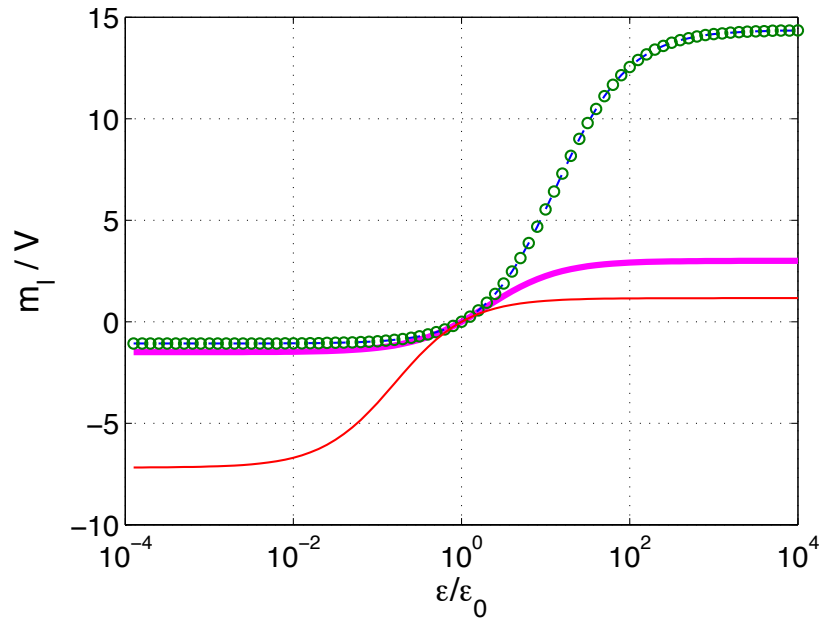


FIGURE 1.6 – Les éléments diagonaux du tenseur de polarisation  $m_l/V$  en fonction de  $\varepsilon/\varepsilon_0$  pour le cas d'un ellipsoïde aplati de semi-axes (1 m ; 1 m ; 0,1 m) comparé au cas d'une sphère, ( - - ) l'élément  $m_a$ , (o o) l'élément  $m_b$ , (— fin) l'élément  $m_c$  du tenseur de polarisation et (— fort) l'élément  $m_a = m_b = m_c$  pour le cas d'une sphère de semi-axes (1 m ; 1 m ; 1 m). Echelle logarithmique des abscisses  $\varepsilon/\varepsilon_0$ .

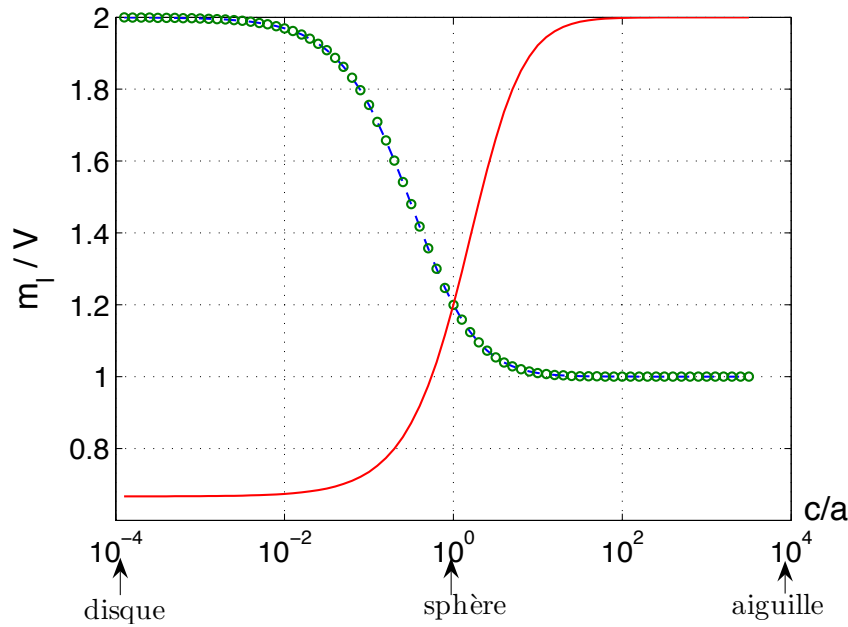


FIGURE 1.7 – Les éléments diagonaux du tenseur de polarisation normalisé  $m_l/V$  en fonction de  $c/a$  pour  $\varepsilon_r = 3$ , (---) l'élément  $m_a$ , (o o) l'élément  $m_b$ , (—) l'élément  $m_c$  du tenseur de polarisation. Echelle logarithmique des abscisses  $c/a$ . Ici on a fixé  $a = b = 1$ .

## 1.7 Tenseur de polarisation pour deux inclusions sphériques couplées

Dans la formulation asymptotique du champ diffracté (1.14), si l'on applique le tenseur de polarisation de chaque inclusion isolée, la diffraction multiple est alors ignorée. Pour prendre en compte la diffraction multiple entre deux inclusions sphériques disjointes (de même taille ou de tailles différentes) dans un milieu homogène, il faut introduire un nouveau tenseur de polarisation.

Bien que le cas ne va pas être traité dans le présent rapport, nous voulons signaler que pour deux sphères diélectriques asymétriques jointes (qui se touchent ou s'interpénètrent, i.e., la distance entre les centres des deux sphères est inférieure ou égale à la somme des rayons des deux sphères), ce tenseur peut être traité à l'aide du système de coordonnées toroïdal comme cela a été étudié, entre autre, dans [47] et [50]. Dans ce cas, le tenseur de polarisation a été défini dans [23].

Revenons à notre étude de deux sphères disjointes. Le tenseur de polarisation, dans notre cas, est dérivé par une méthode analytique basée sur la séparabilité de l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques [13], [24] et [23].

### 1.7.1 Système de coordonnées bisphériques

Nous considérons deux sphères de rayons  $a_1$  et  $a_2$  qui sont séparées par une distance  $d > a_1 + a_2$  centre à centre. Le système de coordonnées bisphériques [43] nous permet de traiter cette configuration. Ce système  $(\zeta, \theta, \phi)$  est connecté au système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$

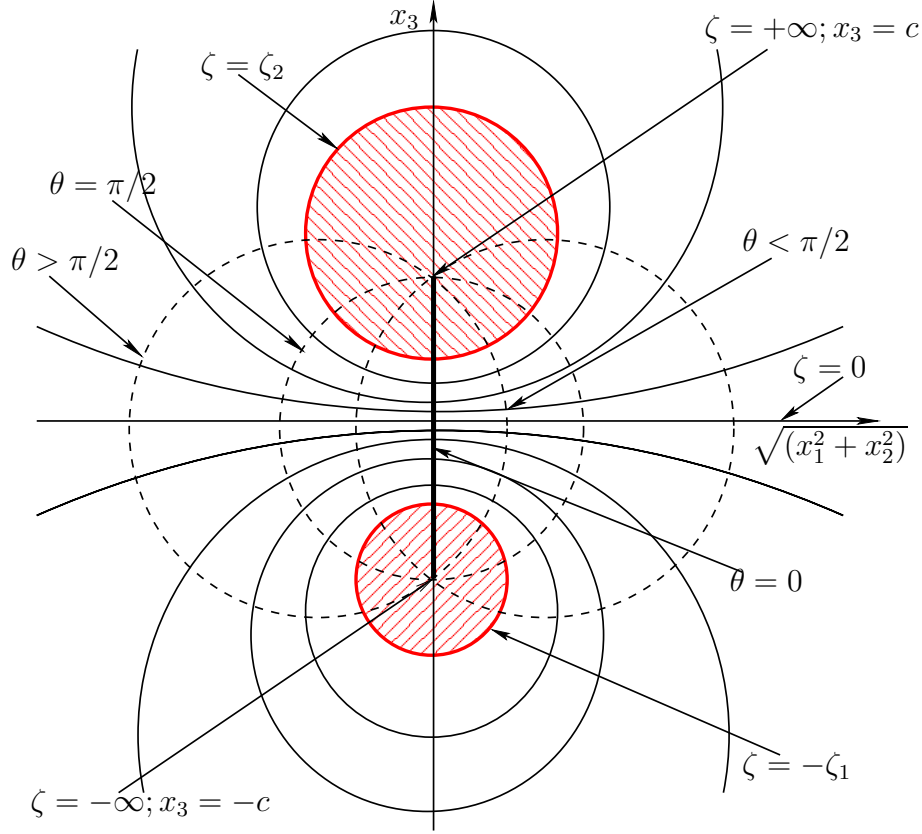


FIGURE 1.8 – Coordonnées bisphériques

par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c}{R(\zeta, \theta)} \sin \theta \cos \phi, \\ x_2 = \frac{c}{R(\zeta, \theta)} \sin \theta \sin \phi, \\ x_3 = \frac{c}{R(\zeta, \theta)} \sinh \zeta, \end{cases}$$

où  $R(\zeta, \theta) = \cosh \zeta - \cos \theta$ ,  $2c$  est la distance focale,  $\zeta \in \mathbb{R}$  spécifie la sphère parmi les sphères qui ne s'intersectent pas (celles en (—) dans la figure 1.8),  $\theta \in [0, \pi]$  spécifie la sphère parmi les sphères qui s'intersectent (celles en (---) dans la figure 1.8) et  $\phi \in [0, 2\pi)$  est l'angle azimutal par rapport à l'axe  $x_3$ . Les surfaces de constantes  $\zeta = -\zeta_1$  et  $\zeta = \zeta_2$  sont les sphères de rayons  $a_j = c/|\sinh \zeta_j|$  où  $j = 1, 2$ , centrées aux positions  $(0, 0, c \coth \zeta_j)$ .

$$c = \frac{\sqrt{d^2 - (a_1 - a_2)^2} \sqrt{d^2 - (a_1 + a_2)^2}}{2d}. \quad (1.25)$$

Dans ce système de coordonnées l'élément infinitésimal de surface est donné par :

$$ds(\mathbf{r}) = c^2 \frac{\sin \theta}{R^2(\zeta, \theta)} d\theta d\phi. \quad (1.26)$$

Un cas limite intéressant se réalise lorsque  $\zeta_2 = 0$  et, comme le montre la figure 1.8, la sphère supérieure voit son rayon tendre vers  $+\infty$  et cette sphère se transforme alors en le demi-espace  $z > 0$ . La configuration se transforme donc de deux sphères couplées en espace libre en une sphère couplée à l'interface dans un milieu demi-espace. Cette dernière configuration sera étudiée en détail dans le prochain chapitre (chapitre 2).

Dans le système de coordonnées bisphériques, l'équation de Laplace est définie comme suit

$$\Delta u(\zeta, \theta, \phi) = \frac{R^3(\zeta, \theta)}{c^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{R(\zeta, \theta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{R(\zeta, \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{R^2(\zeta, \theta)}{c^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right].$$

Toute fonction harmonique  $u$  satisfait la  $R$ -séparabilité, et une fonction propre régulière à l'origine est de la forme :

$$u = \sqrt{R(\zeta, \theta)} \left\{ \begin{matrix} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} \\ e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \end{matrix} \right\} P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \right\},$$

où  $P_n^m$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m = 0, 1, \dots, n$ .

## 1.7.2 Configuration

Nous considérons que les deux sphères sont de rayons  $a_1$  et  $a_2$ . Leurs volumes sont  $|V_j|$ ,  $j = 1, 2$  et leurs surfaces sont  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ . Les deux centres sont situés sur l'axe  $x_3$  et une distance  $d > a_1 + a_2$  sépare leurs deux centres. La première sphère est à  $x_3 < 0$  et la seconde à  $x_3 > 0$ . Le tenseur de polarisation de chaque sphère est associé à un contraste  $\gamma_j = q_j/q_0$  (voir figure 1.7.2).

## 1.7.3 Expression du tenseur de polarisation

Le tenseur de polarisation pour chaque sphère est défini par [24]

$$\underline{\mathbf{M}}_g(\gamma_j; V_j) = (\gamma_j - 1)^2 \int_{S_j} \hat{\nu} \mathbf{u}^+(\mathbf{r}, \gamma_j) ds_j(\mathbf{r}) + (\gamma_j - 1) |V_j| \underline{\mathbf{I}}, \quad (1.27)$$

où  $\nu$  est le vecteur normal sortant.

Le tenseur de polarisation  $j$  est tel qu'il est associé à la solution du système en transmission

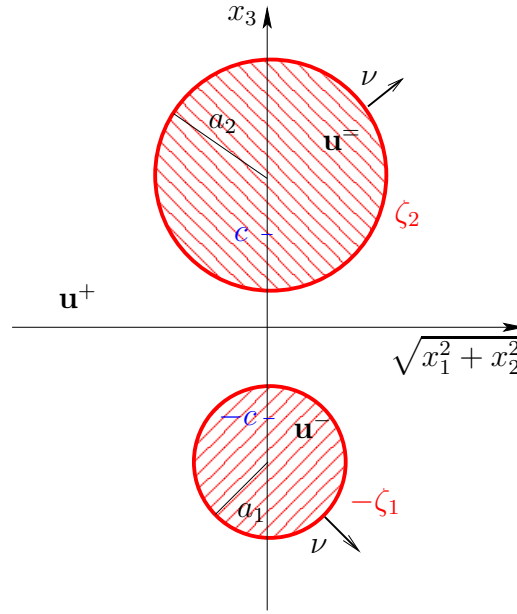


FIGURE 1.9 – Deux inclusions sphériques couplées

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^- = 0, \\ \Delta u_i^{\bar{}} = 0, \\ \Delta u_i^+ = 0, \\ u_i^+ = u_i^-, \quad \zeta = -\zeta_1, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^+ = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^- + \hat{\nu} \cdot \hat{x}_i, \quad \zeta = -\zeta_1, \\ u_i^+ = u_i^{\bar{}}, \quad \zeta = \zeta_2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^+ = \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^{\bar{}} + \hat{\nu} \cdot \hat{x}_i, \quad \zeta = \zeta_2, \\ u_i^+ = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (1.28)$$

où  $u_i^{\bar{}}$  est un élément du potentiel vectoriel  $\mathbf{u}^{\bar{}}$  à l'intérieur de la sphère située en  $x_3 > 0$ ,  $u_i^-$  est un élément du potentiel vectoriel  $\mathbf{u}^-$  de la sphère où  $x_3 < 0$  et  $u_i^+$  est un élément du vecteur potentiel  $\mathbf{u}^+$  de l'espace libre,  $i = 1, 2, 3$ . Pour évaluer (1.27), nous avons besoin de calculer le potentiel  $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, u_2^+, u_3^+)$  du milieu où se trouvent les deux sphères. Les expressions du potentiel vectoriel  $\mathbf{u}^+(\mathbf{r}, \gamma) = (u_1^+, u_2^+, u_3^+)$  pour  $-\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$ , sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^+ = \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_n^{(1)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi, \\ u_2^+ = \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_n^{(2)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(2)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n^1(\cos \theta) \sin \phi, \\ u_3^+ = \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( C_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n(\cos \theta), \end{array} \right. \quad (1.29)$$

où  $R(\zeta, \theta) = \cosh \zeta - \cos \theta$ .

A partir des conditions de transmission (1.28), nous caractérisons les coefficients  $C_n^{(1)}$  et  $D_n^{(1)}$

ou  $C_n^{(2)}$  et  $D_n^{(2)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , grâce au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
& (\gamma_1 - 1) [\sinh \zeta_1 - (2n + 1) \cosh \zeta_1] C_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + [(\gamma_1 - 1) \sinh \zeta_1 - (2n + 1)(\gamma_1 + 1) \cosh \zeta_1] D_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 - 1)(n + 1) C_{n+1}^{(3)} e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} + (\gamma_1 + 1)(n + 1) D_{n+1}^{(3)} e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 - 1)n C_{n-1}^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 + 1)n D_{n-1}^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& = 4\sqrt{2}c \sinh \zeta_1 e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
& [(\gamma_2 - 1) \sinh \zeta_2 - (\gamma_2 + 1)(2n + 1) \cosh \zeta_2] C_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 - 1) [\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2] D_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 + 1)(n + 1) C_{n+1}^{(3)} e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} + (\gamma_2 - 1)(n + 1) D_{n+1}^{(3)} e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 + 1)n C_{n-1}^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 - 1)n D_{n-1}^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& = 4\sqrt{2}c \sinh \zeta_2 e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Les coefficients  $C_n^{(3)}$  et  $D_n^{(3)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sont déterminés en résolvant aussi le système linéaire suivant <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}
& (\gamma_1 - 1) [\sinh \zeta_1 - (2n + 1) \cosh \zeta_1] C_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + [(\gamma_1 - 1) \sinh \zeta_1 - (2n + 1)(\gamma_1 + 1) \cosh \zeta_1] D_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 - 1)(n + 1) C_{n+1}^{(3)} e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} + (\gamma_1 + 1)(n + 1) D_{n+1}^{(3)} e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 - 1)n C_{n-1}^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& + (\gamma_1 + 1)n D_{n-1}^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\
& = 2\sqrt{2}c [\cosh \zeta_1 - (2n + 1) \sinh \zeta_1] e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
& [(\gamma_2 - 1) \sinh \zeta_2 - (\gamma_2 + 1)(2n + 1) \cosh \zeta_2] C_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 - 1) [\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2] D_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 + 1)(n + 1) C_{n+1}^{(3)} e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} + (\gamma_2 - 1)(n + 1) D_{n+1}^{(3)} e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 + 1)n C_{n-1}^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& + (\gamma_2 - 1)n D_{n-1}^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\
& = 2\sqrt{2}c [-\cosh \zeta_2 + (2n + 1) \sinh \zeta_2] e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Nous obtenons les expressions des éléments diagonaux du tenseur de polarisation de chaque sphère avec deux composantes indépendantes pour chacune :  $M_{11} = M_{22}$  (représentent les composantes

---

1. Nous avons détecté une faute de signe dans l'article [24] et dans l'expression de la formule (48). L'expression (1.32) de ce rapport est l'expression corrigée.

transversales) et  $M_{33}$  (représente la composante longitudinale) :

$$\begin{aligned}
M_{11}(\gamma_j; V_j) &= M_{22}(\gamma_j; V_j) = (\gamma_j - 1)^2 \pi c^2 \sinh \zeta_j \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{R(\zeta_j, \theta)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_n^{(1)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_j} + D_n^{(1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_j} \right) P_n^1(\cos \theta) d\theta + (\gamma_j - 1) |V_j|, \\
M_{33}(\gamma_j; V_j) &= (\gamma_j - 1)^2 2\pi c^2 \sinh \zeta_j \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R(\zeta_j, \theta)^{\frac{5}{2}}} \operatorname{sgn}(\zeta) [\sinh \zeta_j - R(\zeta_j, \theta) \coth \zeta_j] \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{+\infty} (C_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_j} + D_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_j}) P_n(\cos \theta) d\theta + (\gamma_j - 1) |V_j|,
\end{aligned}$$

où

$$\operatorname{sgn}(\zeta) = \begin{cases} -1 & \text{si } \zeta = -\zeta_1, \\ 1 & \text{si } \zeta = \zeta_2. \end{cases}$$

En pratique, les sommes infinies  $\sum_{n=0,1}^{+\infty}$  vont être remplacées par des sommes finies  $\sum_{n=0,1}^N$  comme il sera expliqué dans le paragraphe suivant.

#### 1.7.4 Comportement des éléments du tenseur de polarisation

Pour déterminer les éléments diagonaux du tenseur de polarisation (calculés par les coordonnées bisphériques) pour chaque sphère nous remplaçons les sommes infinies  $\sum_{n=0,1}^{+\infty}$  par des sommes finies  $\sum_{n=0,1}^N$  où le nombre  $N$  est calculé de manière itérative de telle sorte que la correction de l'ordre  $(N+1)$  par rapport à l'ordre  $(N)$  soit inférieur à un seuil de convergence pris ici égal à  $10^{-15}$ .

Nous considérons à titre d'exemple deux sphères diélectriques de même permittivité relative  $\varepsilon_r = 3$  et de même rayon  $a_1 = a_2 = 0,03$  m. On constate d'après le tableau 1.2 que plus les deux

$d$ (m)	Erreur	$N$
0,061	$O(10^{-15})$	83
0,063	$O(10^{-15})$	49
0,065	$O(10^{-15})$	38
0,07	$O(10^{-15})$	28
0,08	$O(10^{-15})$	20
0,09	$O(10^{-15})$	17
0,1	$O(10^{-15})$	15
0,2	$O(10^{-15})$	9
0,4	$O(10^{-15})$	7
0,6	$O(10^{-15})$	6

TABLE 1.2 – Choix du nombre  $N$  dans le cas de deux sphères identiques

sphères sont rapprochées, plus le nombre  $N$  croît rapidement. Une fois que nous avons déterminé



le nombre  $N$ , nous traçons les éléments diagonaux du tenseur de polarisation calculés par les coordonnées bisphériques, en les comparant à ceux d'une sphère isolée en espace libre en fonction de  $d/(a_1 + a_2)$ . Signalons que nous avons validé nos valeurs numériques des éléments du tenseur normalisé par une application Java mise en ligne par [48]. Cette dernière traite le cas de deux sphères diélectriques jointes et disjointes de même rayon et de même permittivité.

La figure 1.10 nous montre que les tenseurs de polarisation des deux sphères sont identiques puisque les deux sphères sont de même rayon et de même permittivité. Nous voyons aussi que les éléments transversaux  $M_{11}$  et  $M_{22}$  se comportent d'une manière différente de l'élément longitudinal  $M_{33}$  lorsque les deux sphères sont proches ( $d/(a_1 + a_2) < 4$ ). En effet, nous trouvons que les composantes parallèles  $M_{11} = M_{22}$  sont inférieures à  $M$  et la composante  $M_{33}$  est supérieure à  $M$ , où  $M$  est l'élément du tenseur de polarisation d'une sphère isolée en espace libre. Ce comportement nous rappelle le cas d'un ellipsoïde allongé. Ainsi, les figures 1.5 et 1.7 nous montrent que lorsque  $\varepsilon_r > 1$  et  $c/a > 1$ , comme c'est le cas ici ( $\varepsilon_r = 3$ ), la composante transversale du tenseur de polarisation est inférieure et la composante longitudinale du tenseur de polarisation est supérieure à l'élément du tenseur de polarisation d'une sphère de rayon égal aux semi-axes latéraux [56]. Lorsque les deux sphères sont éloignées l'une de l'autre ( $d/(a_1 + a_2) > 4$ ), on peut ignorer leur couplage puisque les éléments du tenseur de polarisation calculés par les coordonnées bisphériques deviennent identiques à celui du tenseur de polarisation d'une sphère isolée en espace libre.

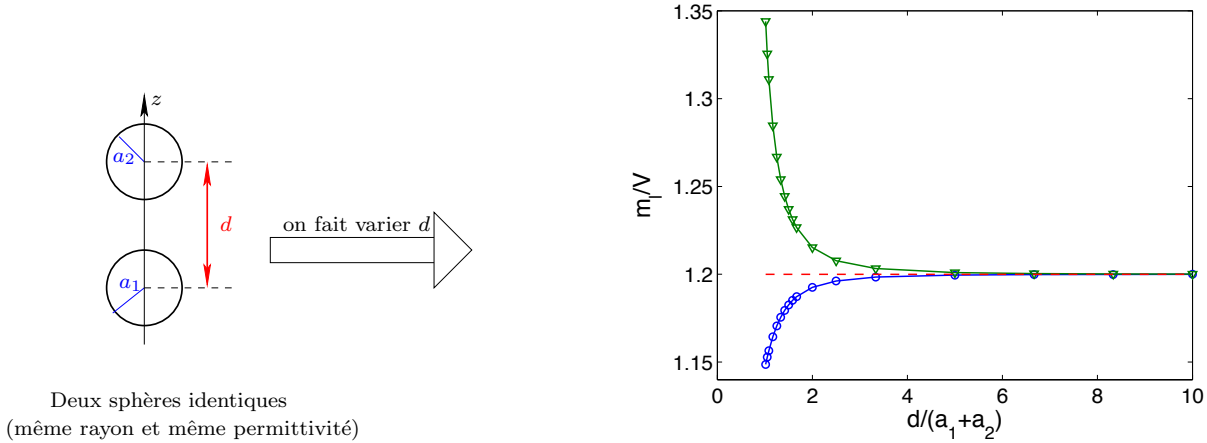


FIGURE 1.10 – Les éléments du tenseur de polarisation calculé dans le système de coordonnées bisphériques pour le cas de deux sphères identiques de même rayon 0,03 m et de même permittivité  $3\varepsilon_0$ , sont comparés à celui d'une sphère isolée en espace libre, (courbe  $\circ$  : éléments du tenseur de polarisation  $M_{11} = M_{22}$  et courbe triangle : élément  $M_{33}$  et courbe  $--$  : éléments du tenseur de polarisation pour une sphère isolée en espace-libre).

Sur la figure 1.10, nous avons vu l'effet du couplage pour le cas de deux sphères de même rayon et de même permittivité. Maintenant, nous essayons de montrer que, dans le cas de deux sphères de rayons différents et de même permittivité, c'est la sphère de plus grand rayon (la « grande sphère ») qui possède une plus grande influence sur l'autre (la « petite sphère »). Prenons une configuration avec une première sphère de rayon  $a_1 = 0,015$  m et une deuxième sphère de rayon  $a_2 = 2a_1 = 0,03$  m. Les deux sphères ont la même permittivité  $\varepsilon_r = 3$ . On fait varier la distance  $d$  entre les centres

des deux sphères et on trace les courbes de comportement des éléments du tenseur de polarisation pour chacune des sphères, voir Fig. 1.12. Nous avons détecté la distance à partir de laquelle les valeurs atteignent la valeur d'une sphère isolée à une précision de 1%. Nous remarquons que la plus grande sphère adopte un comportement de sphère isolée à partir d'une distance  $d_1 = 1,44(a_1 + a_2)$  inférieur à la distance  $d_2 = 2,66(a_1 + a_2)$  que met la plus petite sphère pour avoir un comportement de sphère isolée. En d'autres termes, la grande sphère se libère facilement de l'effet de la petite sphère alors que la petite sphère reste plus longtemps influencée par la grande sphère. Un comportement similaire s'observe lorsque l'on étudie le comportement de deux sphères de même rayon mais de permittivités différentes.

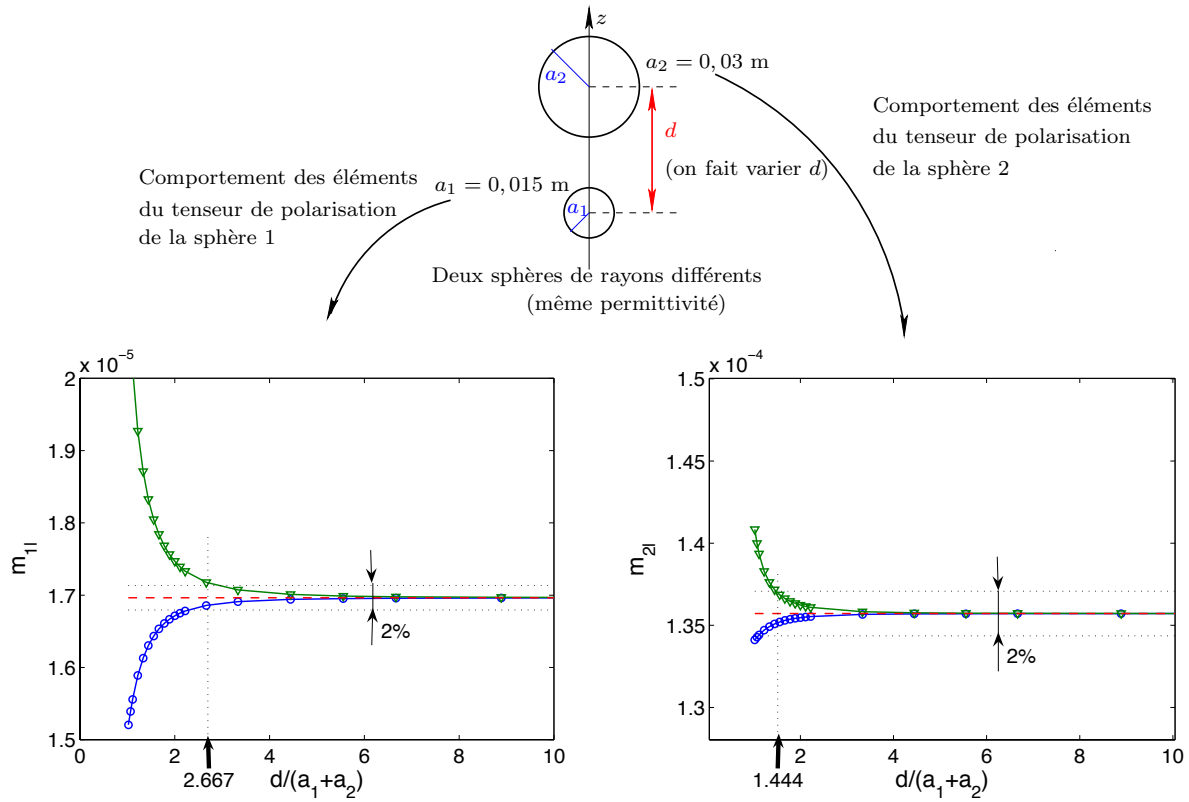


FIGURE 1.11 – Les éléments du tenseur de polarisation calculé dans le système de coordonnées bisphériques pour le cas de deux sphères de différents rayons :  $a_1 = 0,015$  m et  $a_2 = 0,03$  m, et de même permittivité relative  $\varepsilon_r = 3$ , sont comparés à ceux d'une sphère isolée en espace libre.

Dans une autre simulation, on a gardé les deux sphères de même rayon à distance fixe  $d = 0,1$  m. Nous fixons la permittivité de la première sphère à  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$  et nous faisons varier la permittivité de la seconde sphère. Sur la figure 1.12 nous traçons les éléments du tenseur de la première sphère en fonction de  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ . Nous remarquons que la variation de  $\varepsilon_2$  affecte le tenseur de la première sphère, ce qui est une bonne preuve que notre tenseur prend bien en compte le couplage entre les deux sphères.

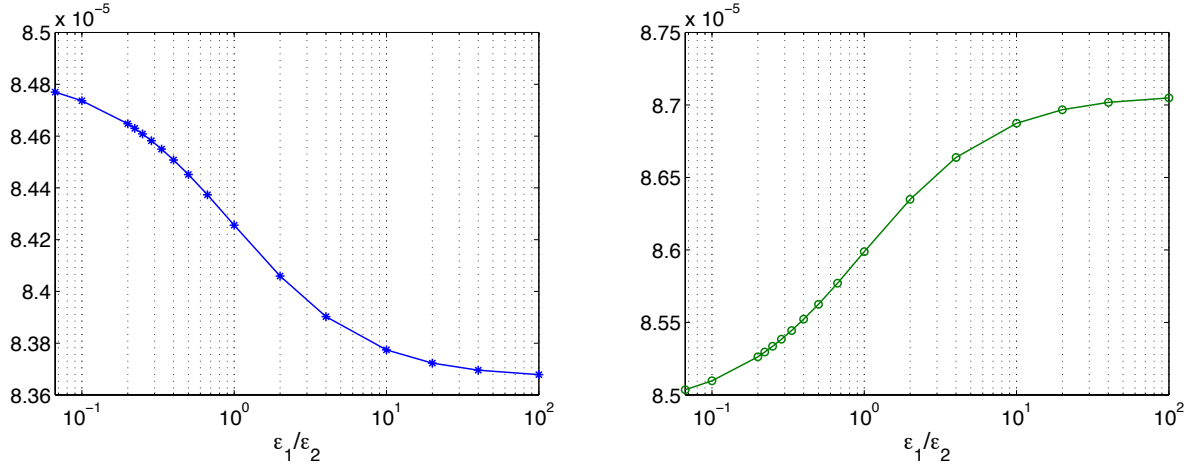


FIGURE 1.12 – Les éléments  $M_{11} = M_{22}$  (courbe de gauche) et  $M_{33}$  (courbe de droite) du tenseur de polarisation de la première sphère de permittivité  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$  calculé dans le système de coordonnées bisphériques pour le cas de deux sphères de même rayon  $a = 0,03$  m séparées par une distance  $d = 0,1$  m en fonction de  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ .

## 1.8 Diffraction multiple entre des inclusions en utilisant le modèle de Foldy-Lax

Pour le cas de deux sphères couplées, la diffraction multiple est considérée en introduisant un nouveau tenseur de polarisation obtenu via les coordonnées bisphériques. Ceci ne peut être au cas de  $m \geq 3$  inclusions, sauf si l'on considère des doublets de sphères isolées les unes des autres, ce qui est un cas très particulier. Aussi, pour traiter trois inclusions et plus, nous nous portons vers le modèle de Foldy-Lax (qui peut, clairement être considéré aussi pour deux inclusions) dans la formule asymptotique du champ diffracté. Ces  $m$  inclusions peuvent être des inclusions ellipsoïdales ou sphériques ou de forme géométrique quelconque (il suffit d'avoir l'expression analytique de leurs tenseurs de polarisation). Nous pouvons intégrer le modèle de Foldy-Lax [58] puisque les  $m$  inclusions sont supposées de petites tailles de telle sorte que chaque inclusion est assez petite devant la longueur d'onde. Donc nous pouvons considérer que le champ à l'intérieur de chaque inclusion est uniforme. Chaque inclusion se comporte comme un point dipôle. Le champ à l'intérieur de chaque inclusion  $l$  est le champ incident généré par un émetteur auquel on ajoute le champ diffracté généré par toutes les autres  $m - 1$  inclusions. La formule intégrale de Lippmann-Schwinger du champ total dans l'inclusion  $l$  devient comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{x}_l) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_l) + \alpha^3 \sum_{j \neq l}^m \left[ i\omega \mu_0 \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right. \\
 &\quad \left. + k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right]. \\
 \mathbf{H}(\mathbf{x}_l) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_l) + \alpha^3 \sum_{j \neq l}^m \left[ -i\omega \varepsilon_0 \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right. \\
 &\quad \left. + k^2 \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right].
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Le champ dans chaque inclusion  $l$  est obtenu en résolvant un système d'équations linéaires de dimension  $6m \times 6m$  représenté par (1.34). En effet, les inconnues à ce niveau sont les trois composantes du champ  $\mathbf{E}$  et les trois composantes du champ  $\mathbf{H}$  à l'intérieur de chaque inclusion. Une fois ce système résolu, le champ diffracté au point d'observation  $\mathbf{r}$  peut être calculé par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \alpha^3 \sum_{j=1}^m \left[ i\omega \mu_0 \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}} \left( \frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right. \\ \left. + k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

## 1.9 Effet du couplage

On s'intéresse à la configuration proposée sur la figure 1.13 où on a deux sphères de même rayon 0,03 m et de même permittivité  $3\varepsilon_0$  dont les centres sont séparés d'une distance  $d$ . Ces sphères sont illuminées par un dipôle élémentaire source électrique situé en  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 1,2 \text{ m})$  polarisé verticalement et émettant à la fréquence 500 MHz. La longueur d'onde est donc  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ . Le rayon de chaque sphère est de l'ordre de  $\lambda/20$ . On peut donc appliquer la formule asymptotique pour calculer le champ diffracté.

On veut calculer le champ diffracté sur le plan  $y = 0$ . Une première approche consiste à calculer le champ diffracté par la première sphère en utilisant le tenseur de polarisation d'une sphère isolée et d'y ajouter le champ diffracté par la seconde sphère de la même manière. L'inconvénient ici est que la diffraction multiple entre les deux sphères (ou, autrement dit, le couplage entre les sphères) sera ignorée. Nous appelons le champ calculé de cette manière  $E_{\text{sphères isolées}}$ . Une première amélioration consiste à appliquer le modèle de Foldy-Lax entre les deux sphères pour prendre en compte ce couplage. Nous appelons le champ calculé de cette manière  $E_{\text{Foldy-Lax}}$ . L'autre approche consiste à calculer le champ diffracté en utilisant les tenseurs de polarisation via le système bisphérique pour obtenir ce que nous appelons  $E_{\text{bisphériques}}$ . Nous avons réalisé trois simulations pour trois différentes valeurs de  $d$  : 0,066 m ; 0,12 m et 0,24 m. A chaque fois, nous affichons la différence d'amplitude de la composante verticale entre les champs  $E_{\text{sphères isolées}}$  et  $E_{\text{bisphériques}}$  ainsi que la même différence entre  $E_{\text{sphères isolées}}$  et  $E_{\text{Foldy-Lax}}$  de façon à détecter les régions du plan  $y = 0$  où se manifeste le plus l'effet du couplage entre les deux sphères.

Les figures 1.14 pour  $d = 0,066 \text{ m}$ , 1.15 pour  $d = 0,12 \text{ m}$  et 1.16 pour  $d = 0,24 \text{ m}$  montrent toutes que l'effet du couplage n'est visible qu'au voisinage immédiat des deux sphères. En effet, l'erreur relative du champ diffracté ne dépasse pas 6%.

Réalisons maintenant une deuxième série de simulations (voir Fig. 1.18, Fig. 1.19, Fig. 1.20, Fig. 1.21, Fig. 1.22 et Fig. 1.23) avec, cette fois, les deux sphères en position horizontale, en gardant le dipôle émetteur à la même position  $(0; 0; 1,2 \text{ m})$ . Cette fois encore l'amplitude de la composante

verticale de  $E_{\text{sphères isolées}} - E_{\text{bisphériques}}$  et celle de  $E_{\text{sphères isolées}} - E_{\text{Foldy-Lax}}$  n'est détectable qu'au proche voisinage des deux sphères.

Ces séries de simulations nous permettent de déduire que lorsque l'on dispose un dipôle récepteur à plus de  $\lambda$  de distance des inclusions, le champ diffracté mesuré par ce dipôle pourra être estimé en calculant le champ diffracté en utilisant les tenseurs de polarisation des inclusions isolées, c'est-à-dire sans prendre en compte un quelconque couplage entre ces inclusions. C'est ce que nous allons faire pour formuler le problème direct et pour calculer la matrice de réponse multi-statique du système dans le chapitre 4.

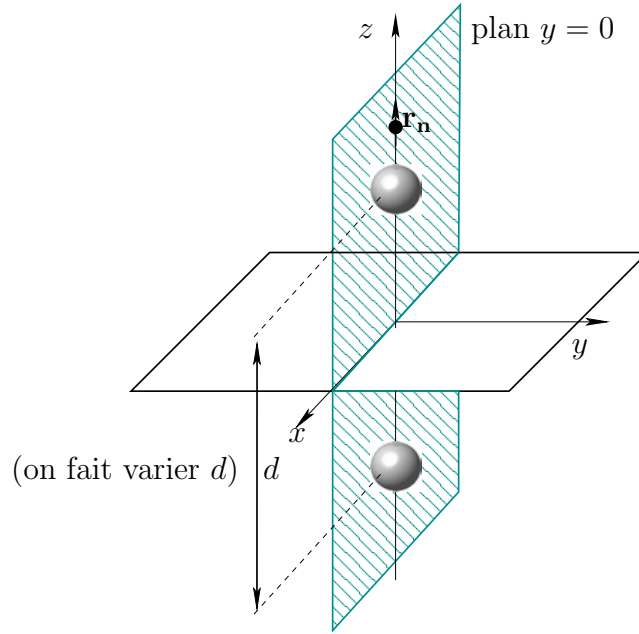


FIGURE 1.13 – Le plan d'observation  $y = 0$  pour un dipôle placé à  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 1,2 \text{ m})$  rayonnant à une fréquence 500 MHz donc  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ .

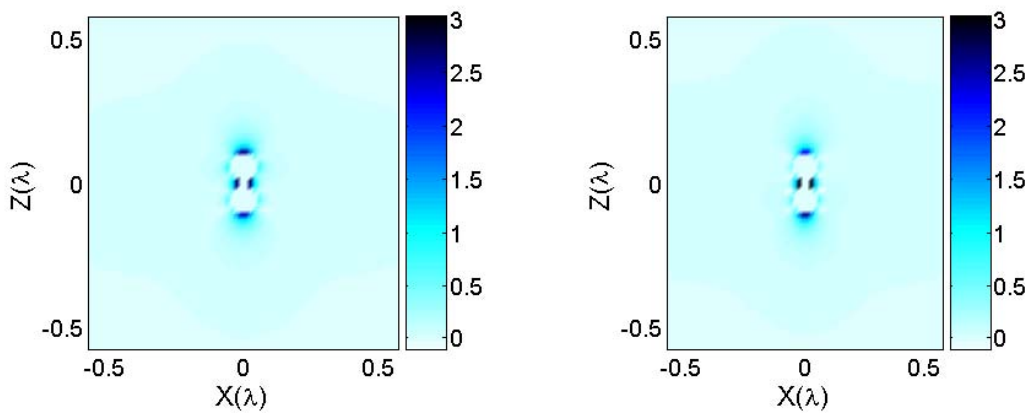
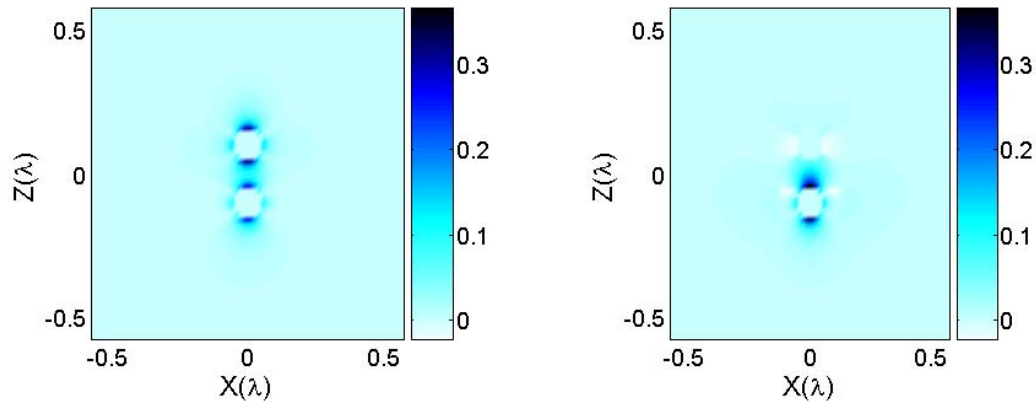
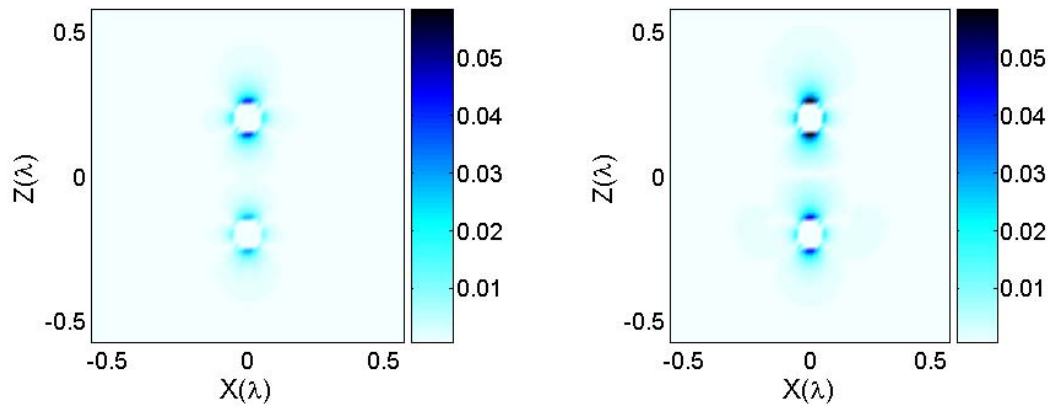
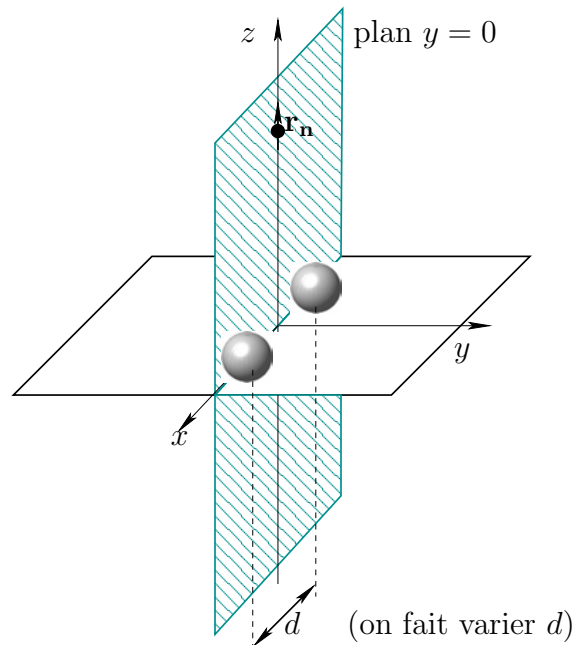


FIGURE 1.14 – Pour  $d = 0,066 \text{ m}$ , on affiche la différence d'amplitude de la composante verticale du champ diffracté calculé par la formule asymptotique avec et sans prise en compte de la diffraction multiple entre deux sphères identiques de rayons  $a = 0,03 \text{ m}$  et de permittivités  $\varepsilon = 3$  centrées sur l'axe  $z$  dans le plan  $y = 0$ . À gauche calcul dans le système bisphérique et à droite calcul selon l'approche de Foldy-Lax.

FIGURE 1.15 – Pour  $d = 0.12$  m, comme en Fig. 1.14.FIGURE 1.16 – Pour  $d = 0.24$  m, comme en Fig. 1.14.FIGURE 1.17 – Le plan d'observation  $y = 0$  pour un dipôle placé à  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 1.2 \text{ m})$  rayonnant à une fréquence 500 MHz (donc  $\lambda = 0.6 \text{ m}$ ).

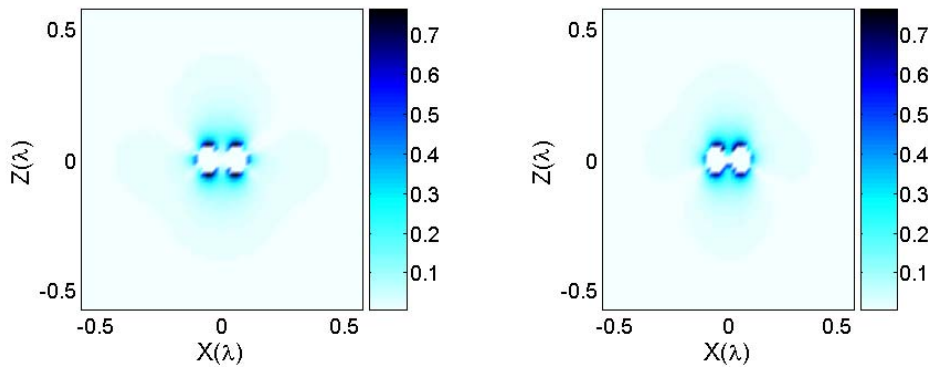


FIGURE 1.18 – Même analyse qu'en Fig. 1.14, les deux sphères étant centrées sur l'axe  $x$  dans le plan  $y = 0$ .

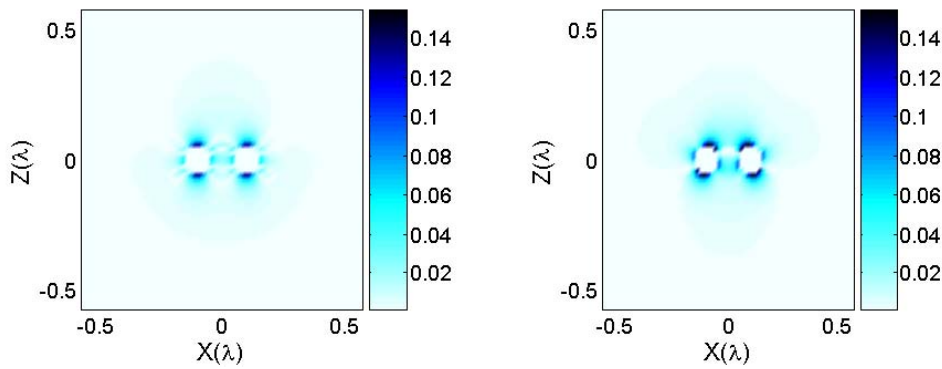


FIGURE 1.19 – Pour  $d = 0, 12$  m, comme en Fig. 1.18.

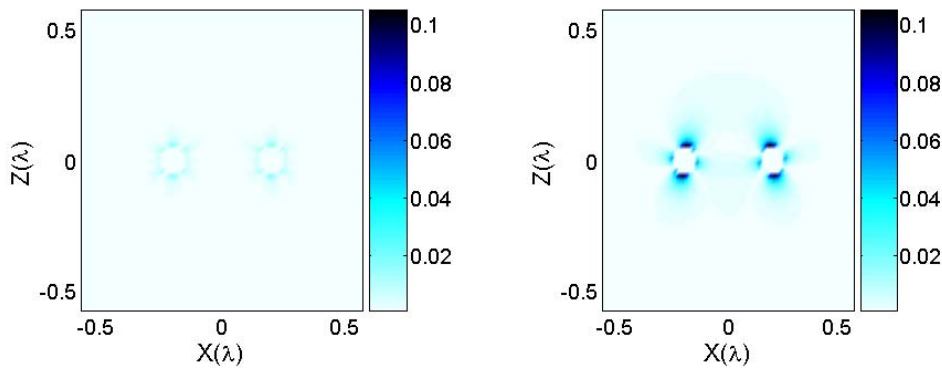


FIGURE 1.20 – Pour  $d = 0, 24$  m, comme en Fig. 1.18.

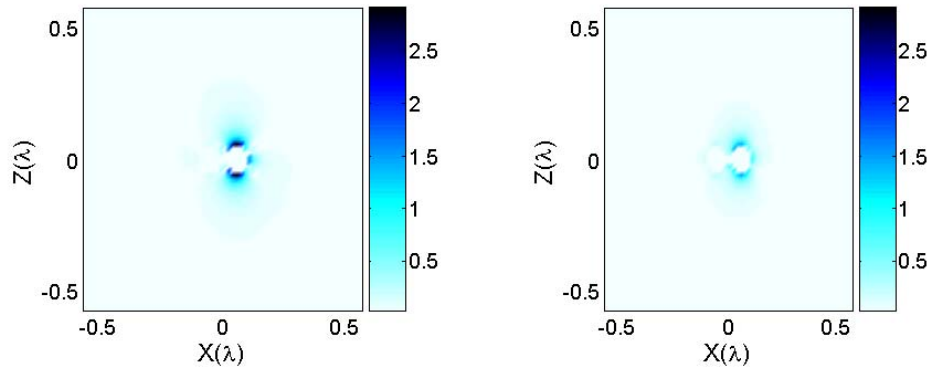


FIGURE 1.21 – Même analyse qu'en Fig. 1.14, les deux sphères centrées sur l'axe  $x$  dans le plan  $y = 0$  étant de différentes permittivités  $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 5$ .

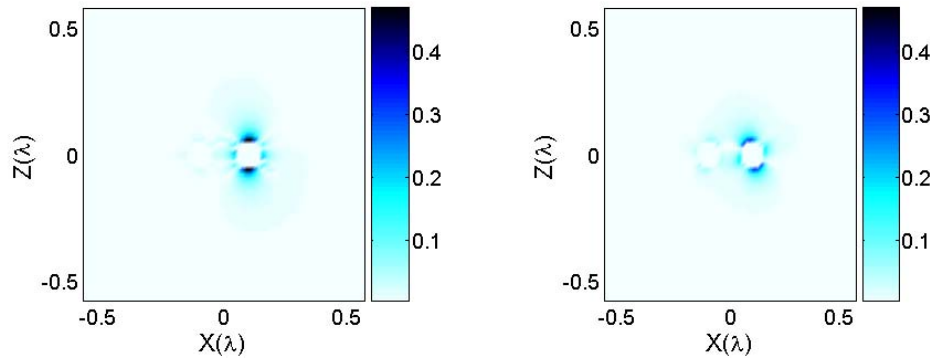


FIGURE 1.22 – Pour  $d = 0, 12$  m, comme en Fig. 1.21.

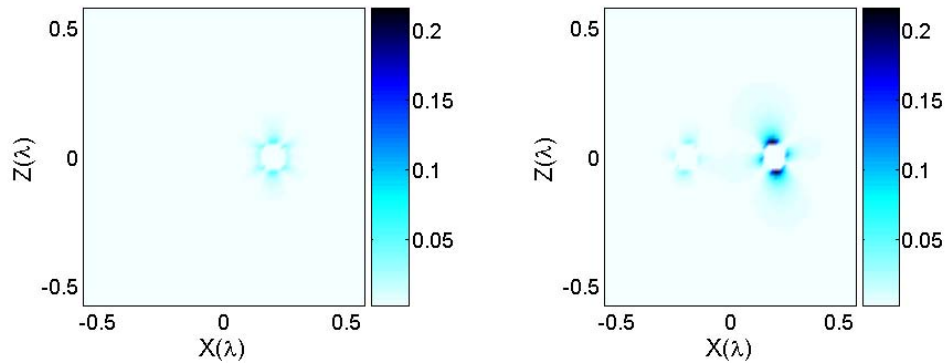


FIGURE 1.23 – Pour  $d = 0, 24$  m, comme en Fig. 1.21.



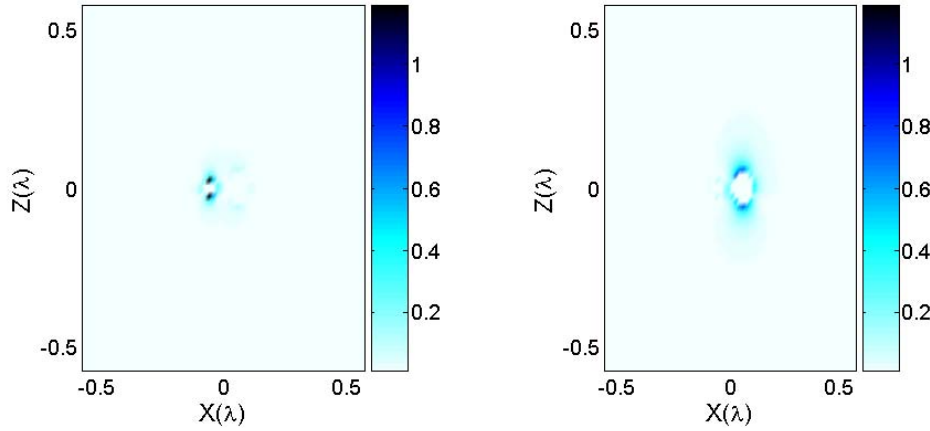


FIGURE 1.24 – Même analyse qu'en Fig. 1.14, les deux sphères centrées sur l'axe  $x$  dans le plan  $y = 0$  étant de différents rayons  $a_1 = 0,015$  m,  $a_2 = 0,03$  m.

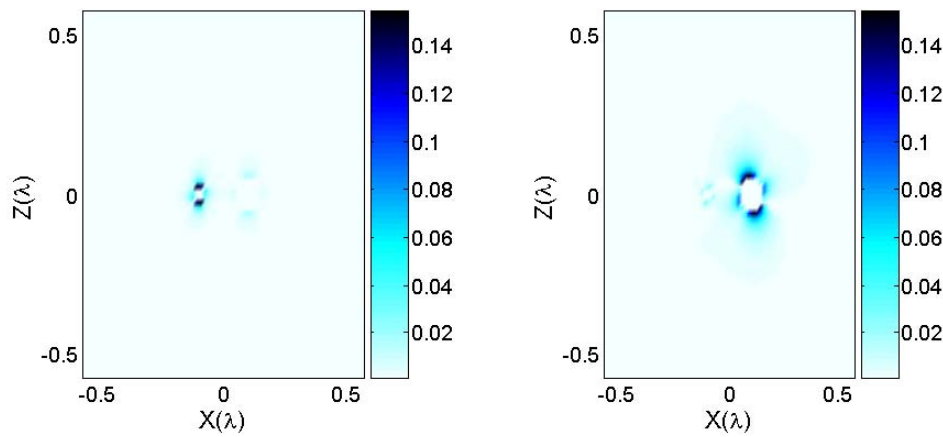


FIGURE 1.25 – Pour  $d = 0,12$  m, comme en Fig. 1.24.

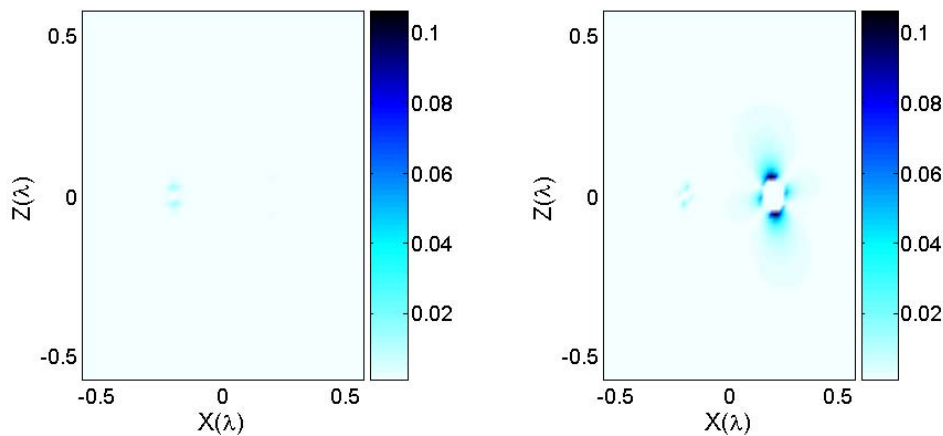


FIGURE 1.26 – Pour  $d = 0,24$  m, comme en Fig. 1.24.

## Chapitre 2

# Formule asymptotique du champ diffracté en demi-espace

### 2.1 Introduction

Après avoir étudié la formule asymptotique du champ diffracté par de petits objets en espace libre, nous nous intéressons dans ce chapitre au cas du demi-espace. La différence vient essentiellement des dyades de Green spécifiques à cette configuration. Le temps de calcul de ces dyades de Green s'avère assez long. Nous étudions dans ce chapitre trois solutions pour réduire ce temps de calcul. La formule asymptotique du champ diffracté ne prenant pas en compte nativement le couplage d'une inclusion sphérique à l'interface, nous calculons dans ce chapitre un tenseur de polarisation qui tient compte de ce couplage et nous étudions son effet.

### 2.2 Configuration

Dans ce chapitre, le système étudié est composé de deux milieux différents séparés par une interface plane  $z = 0$ . Le premier milieu ( $z > 0$ ) se caractérise par une permittivité  $\varepsilon_+$  et une perméabilité  $\mu_+$  et le second milieu ( $z < 0$ ) se caractérise par une permittivité  $\varepsilon_-$  et une perméabilité  $\mu_-$ . Nous considérons que les  $m$  petites inclusions  $D_j = \mathbf{x}_j + \alpha V_j$ ,  $j = 1 \dots m$ , sont enfouies dans le milieu inférieur. Chaque inclusion  $j$  a ses propres permittivité  $\varepsilon_j$  et perméabilité  $\mu_j$  (voir Fig. 2.1).

Considérons les deux fonctions suivantes :

$$\mu_\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_+ & \text{si } z > 0, \\ \mu_j & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{I}_\alpha, \\ \mu_- & \text{si } z < 0 \text{ et } \mathbf{r} \notin \mathcal{I}_\alpha, \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_+ & \text{si } z > 0, \\ \varepsilon_j & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{I}_\alpha, \\ \varepsilon_- & \text{si } z < 0 \text{ et } \mathbf{r} \notin \mathcal{I}_\alpha, \end{cases}$$

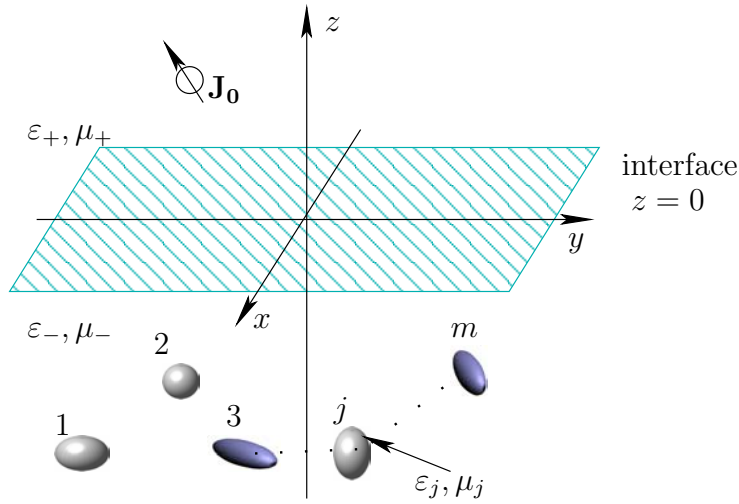


FIGURE 2.1 – Configuration demi-espace

où  $k_- = \omega\sqrt{\varepsilon_- \mu_-}$  et  $k_+ = \omega\sqrt{\varepsilon_+ \mu_+}$  sont les nombres d'onde des deux milieux. La dépendance temporelle, choisie en  $e^{-i\omega t}$ , sera sous-entendue par la suite.

## 2.3 Dyades de Green

Nous nous appuyons ici très exactement sur les éléments de l'analyse effectuée en [35] sachant que des ouvrages classiques, tel [52, 18], fournissent aussi un matériel significatif concernant ces dyades.

### 2.3.1 Dyade de Green $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$

Considérons une source électrique à la position  $\mathbf{r}'$ . La dyade de Green électrique-électrique  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la dyade de Green permettant de calculer, à partir de cette source électrique, le champ électrique rayonné en un point d'observation  $\mathbf{r}$ . Elle est la solution de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla \times \nabla \times \mu^{-1}(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mu^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.1)$$

Dès lors que  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est déterminée, alors le champ incident électrique  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  rayonné par une source parcourue par un courant  $Il$  orienté selon la direction  $\vec{\beta}$  est donné par :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = i\omega \mu(\mathbf{r}') \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \vec{\beta} Il. \quad (2.2)$$

Le dyade de Green électrique-électrique en demi-espace peut correspondre à un seul terme ou à la somme de deux termes selon la position du point source et du point d'observation. En effet, si

le point d'observation  $\mathbf{r}$  et le point source  $\mathbf{r}'$  appartiennent tous les deux au milieu "+" ou tous les deux au milieu "-", alors la dyade de Green contient un premier terme  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  appelé « partie source » traduisant le rayonnement direct et un second terme  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  appelé « partie réfléchie » traduisant la réflexion à l'interface (voir figure 2.2) :

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{ee,S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}^{ee,R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.3)$$

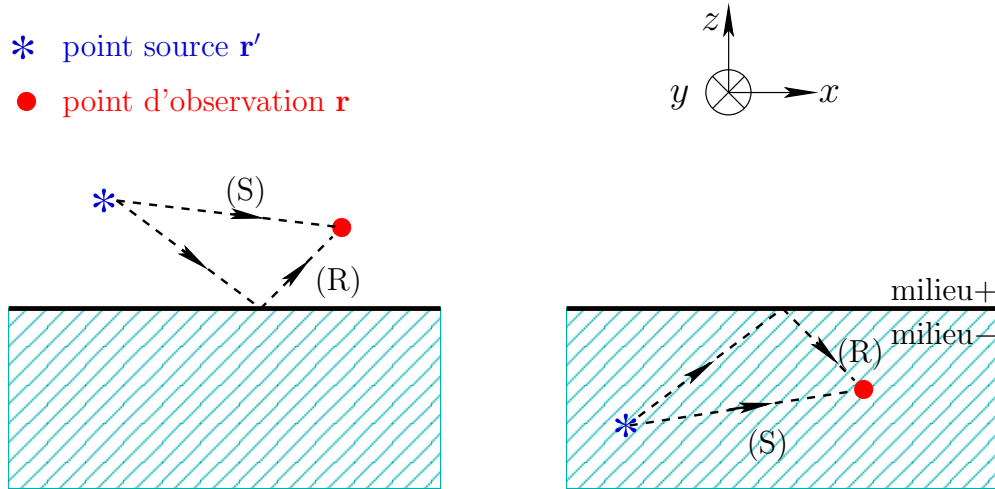


FIGURE 2.2 – La décomposition de la dyade de Green en demi-espace pour un point source et un point d'observation appartenant au même demi-espace. (S) partie source et (R) partie réfléchie.

L'expression analytique de la partie source  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,S}$  est connue dans les deux domaines spectral et spatial. Dans le domaine spatial et dans le système de coordonnées cartésiennes, cette partie source est donnée par :

$$\underline{\mathbf{G}}_{\pm}^{ee,S} = \left[ \underline{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k_{\pm}^2} \right] \frac{e^{ik_{\pm}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.4)$$

où le signe "+" ou "-" est choisi selon que le point d'observation et le point source se situent tous les deux dans le même milieu "+" ou "-". Il s'agit d'une règle générale, appliquée dans la suite de ce chapitre.

Pour prendre en compte la réflexion sur l'interface, nous rajoutons la partie réfléchie  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,R}$ . L'expression analytique de cette partie réfléchie n'est connue que dans le domaine spectral. Grâce à la transformée de Fourier inverse 2 D suivante nous obtenons  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,R}$  dans le domaine spatial :

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{k}_s, z, z') e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s)} d\mathbf{k}_s, \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{k}_s = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \hat{z}z$ .

L'expression spectrale de  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,R}$  est la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{ee,R} &= \left( \underline{\mathbf{I}}^{(1)} + \frac{1}{k_{\pm}^2} \nabla \nabla' \right) \hat{g}_{R,\pm}^{TM} \\ &\quad + \frac{1}{k_s^2} (\nabla_s \times \hat{z})(\nabla'_s \times \hat{z}) (\hat{g}_{R,\pm}^{TM} + \hat{g}_{R,\pm}^{TE})\end{aligned}$$

Ce qui se traduit en écriture matricielle par :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{ee,R}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{R,\pm}^{TE} + \frac{1}{k_{\pm}^2 k_s^2} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} -k_x^2 k_{z\pm}^2 & -k_x k_y k_{z\pm}^2 \mp k_x k_{z\mp} k_s^2 \\ k_x k_y k_{z\pm}^2 & k_y^2 k_{z\pm}^2 \mp k_y k_{z\mp} k_s^2 \\ \pm k_x k_{z\pm} k_s^2 \pm k_y k_{z\pm} k_s^2 & k_s^4 \end{bmatrix} \hat{g}_{R,\pm}^{TM},\end{aligned}\quad (2.6)$$

$g_{R,\pm}^{TM/TE}$  s'expriment comme suit :

$$\hat{g}_{R,\pm}^{TM/TE}(\mathbf{k}_s, z, z') = \frac{i}{2k_{z\pm}} R_{\pm}^{TM/TE} e^{\pm i k_{z\pm} (z+z')} \quad (2.7)$$

où  $R_{\pm}^{TM/TE}$  sont les coefficients de réflexion d'ondes planes  $TM/TE$ . Ces coefficients de réflexion sont donnés par :

$$R_{\pm}^{TM} = \pm \frac{\varepsilon_- k_{z+} - \varepsilon_+ k_{z-}}{\varepsilon_+ k_{z-} + \varepsilon_- k_{z+}} \quad \text{et} \quad R_{\pm}^{TE} = \pm \frac{\mu_- k_{z+} - \mu_+ k_{z-}}{\mu_+ k_{z-} + \mu_- k_{z+}}$$

où  $k_{z\pm} = \sqrt{k_{\pm}^2 - k_s^2}$ ,  $k_s^2 = k_x^2 + k_y^2$ ;  $k_+$  et  $k_-$  sont respectivement les nombres d'ondes dans le sous-espace "+" et "-". Les autres termes sont  $\nabla_s = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y$ ,  $\nabla = \nabla_s + \hat{z}\partial_z$ ,  $\nabla'_s = -\nabla_s$ ,  $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}_{\pm} = \frac{k_{z\pm}}{k_{z\mp}} \nabla_s + \hat{z}\partial_z$ ;  $\underline{\mathbf{I}}^{(1)} = \text{diag}(-1, -1, 1)$ .

Si le point source et le point d'observation ne sont pas placés dans le même milieu ( $\mathbf{r}$  appartient au milieu "+" et  $\mathbf{r}'$  appartient au milieu "-" ou inversement), alors la dyade de Green ne contient plus qu'un seul terme  $\underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  appelé « partie transmise » traduisant la transmission à travers l'interface (voir Fig. 2.3) :

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (2.8)$$

L'expression analytique de cette partie transmise est donnée d'abord dans le domaine spectral, et calculée ensuite dans le domaine spatial par la transformée de Fourier inverse à 2D définie dans (2.5). La dyade de Green de la partie transmise est donnée dans le domaine spectral par :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{ee,T}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{\mu_{\mp}}{\mu_{\pm}} \left[ \left( \underline{\mathbf{I}}^{(2)} + \frac{1}{k_{\mp}^2} \nabla \tilde{\nabla} \right) \hat{g}_{T,\pm}^{TM} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_s^2} (\nabla_s \times \hat{z})(\tilde{\nabla}_s \times \hat{z}) \left( \hat{g}_{T,\pm}^{TM} - \frac{\mu_{\pm}}{\mu_{\mp}} \frac{k_{z\mp}}{k_{z\pm}} \hat{g}_{T,\pm}^{TE} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.9)$$

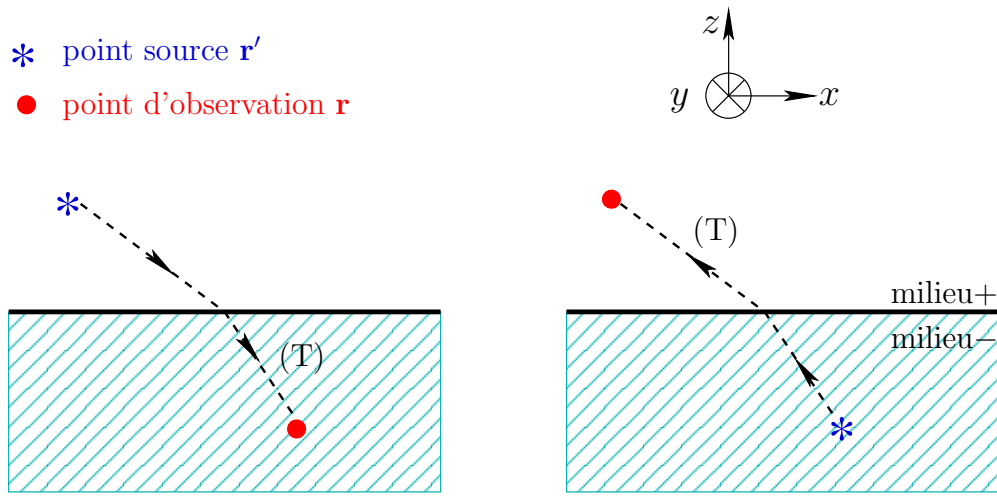


FIGURE 2.3 – (T) partie transmise de la dyade de Green pour un point source et un point d'observation appartenant à deux demi-espaces différents.

où  $\underline{\mathbf{I}}^{(2)} = \underline{\mathbf{I}}_{\pm}^{(2)} = \text{diag} \left( \frac{k_{z\pm}}{k_{z\mp}}, \frac{k_{z\pm}}{k_{z\mp}}, 1 \right)$ .

Ce qui se traduit en écriture matricielle par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{ee,T}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{T,\pm}^{TE} + \frac{\mu_{\mp}}{\mu_{\pm} k_{\mp}^2 k_s^2} \\ &\times \begin{bmatrix} k_x^2 k_{z\pm} k_{z\mp} & k_x k_y k_{z\pm} k_{z\mp} \pm k_x k_{z\mp} k_s^2 \\ k_x k_y k_{z\pm} k_{z\mp} & k_y^2 k_{z\pm} k_{z\mp} \pm k_y k_{z\mp} k_s^2 \\ \pm k_x k_{z\pm} k_s^2 & \pm k_y k_{z\pm} k_s^2 & k_s^4 \end{bmatrix} \hat{g}_{T,\pm}^{TM}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans le domaine spectral, nous avons les expressions suivantes :

$$\hat{g}_{T,\pm}^{TM/TE} = \hat{g}_{T,\pm}^{TM/TE}(\mathbf{k}_s, z, z') = \frac{i}{2k_{z\pm}} T_{\pm}^{TM/TE} e^{\mp i(k_{z\mp} z - k_{z\pm} z')}, \quad (2.11)$$

où  $T_{\pm}^{TM/TE}$  sont les coefficients de transmission d'ondes planes  $TM/TE$ , qui sont donnés par :

$$T_{\pm}^{TM} = \frac{2\varepsilon_{\mp} k_{z\pm}}{\varepsilon_{+} k_{z-} + \varepsilon_{-} k_{z+}} \quad \text{et} \quad T_{\pm}^{TE} = \frac{2\mu_{\mp} k_{z\pm}}{\mu_{+} k_{z-} + \mu_{-} k_{z+}}.$$

### 2.3.2 Dyades de Green $\underline{\mathbf{G}}^{mm}$ et $\underline{\mathbf{G}}^{me}$

De manière analogue, la dyade de Green magnétique-magnétique  $\underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  permet de calculer le champ magnétique créé par une source d'origine magnétique. Si l'on souhaite déterminer le champ

magnétique dû à une source d'origine électrique, il est nécessaire d'utiliser une dyade de Green du type magnétique-électrique  $\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Le champ magnétique est donné par :

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu(\mathbf{r}')}{\mu(\mathbf{r})} \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \vec{\beta} Il. \quad (2.12)$$

De la même manière que précédemment, la dyade de Green magnétique-électrique en demi-espace peut correspondre à un seul terme ou à la somme de deux termes selon la position du point source et du point d'observation. Si le point d'observation  $\mathbf{r}$  et le point source  $\mathbf{r}'$  appartiennent tous les deux au milieu "+" ou tous les deux au milieu "-", alors la dyade de Green contient un premier terme  $\underline{\mathbf{G}}^{me,S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  appelé « partie source » traduisant le rayonnement direct et un second terme  $\underline{\mathbf{G}}^{me,R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  appelé « partie réfléchie » traduisant la réflexion à l'interface (voir figure 2.2) :

$$\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{me,S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}^{me,R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.13)$$

La partie source de la dyade de Green  $\underline{\mathbf{G}}^{me,S}$  est connue analytiquement dans les deux domaines spectral et spatial. Dans le domaine spatial et dans le système de coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , cette partie source est donnée par :

$$\underline{\mathbf{G}}_{\pm}^{me,S} = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\pm}^{ee,S} \quad (2.14)$$

où  $\underline{\mathbf{G}}_{\pm}^{ee,S}$  est défini dans (2.14).

La partie source n'est pas suffisante en présence d'une interface. En effet, on doit aussi considérer une autre partie nommée partie réfléchie  $\underline{\mathbf{G}}^{me,R}$ . Cette partie réfléchie n'est connue analytiquement que dans le domaine spectral. A travers une transformée de Fourier inverse à 2D définie dans (2.5), nous obtenons la partie réfléchie  $\underline{\mathbf{G}}^{me,R}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{me,R}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \nabla \times \mathbf{I}^{(1)} \hat{g}_{R,\pm}^{TM} \\ &\quad - \frac{1}{k_s^2} (\nabla \times \nabla_s \times \hat{z}) (\nabla_s \times \hat{z}) (\hat{g}_{R,\pm}^{TM} + \hat{g}_{R,\pm}^{TE}). \end{aligned}$$

Ce qui se traduit en écriture matricielle par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{me,R}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} \pm i k_{z\pm} k_x k_y & \mp i k_{z\pm} k_x^2 & 0 \\ \pm i k_{z\pm} k_y^2 & \mp i k_{z\pm} k_x k_y & 0 \\ -i k_y k_s^2 & i k_x k_s^2 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{R,\pm}^{TE} + \\ &\quad \frac{\mu_{\mp}}{\mu_{\pm}} \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} \pm i k_{z\pm} k_x k_y & \pm i k_{z\pm} k_y^2 & i k_y k_s^2 \\ \mp i k_{z\pm} k_x^2 & \mp i k_{z\pm} k_x k_y & -i k_x k_s^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{R,\pm}^{TM}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si le point source et le point d'observation ne sont pas placés dans le même milieu ( $\mathbf{r}$  appartient au milieu "+" et  $\mathbf{r}'$  appartient au milieu "-" ou l'inverse), alors la dyade de Green ne contient plus qu'un seul terme  $\underline{\mathbf{G}}^{me,T}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  traduisant la transmission à travers l'interface (voir figure 2.3) :

$$\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \underline{\mathbf{G}}^{me,T}(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (2.16)$$

L'expression analytique de cette partie transmise est donnée d'abord dans le domaine spectral, et calculée ensuite dans le domaine spatial par une transformée de Fourier inverse à 2D définie dans (2.5). La dyade de Green magnétique-électrique de la partie transmise dans le domaine spectral est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{me,T}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{\mu(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r}')} \left[ \nabla \times \underline{\mathbf{I}}^{(2)} \hat{g}_{T,\pm}^{TM} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_s^2} (\nabla \times \nabla_s \times \hat{z})(\tilde{\nabla}_s \times \hat{z}) \left( \hat{g}_{T,\pm}^{TM} - \frac{\mu(\mathbf{r}')}{\mu(\mathbf{r})} \frac{k_z}{k_{z'}} \hat{g}_{T,\pm}^{TE} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ce qui se traduit en écriture matricielle par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_{\pm}^{me,T}(\mathbf{k}_s, z, z') &= \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} \mp i k_x k_y k_{z\mp} & \pm i k_x^2 k_{z\mp} & 0 \\ \mp i k_y^2 k_{z\mp} & \pm i k_x k_y k_{z\mp} & 0 \\ -i k_y k_s^2 & i k_x k_s^2 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{T,\pm}^{TE} + \\ &\quad \frac{\mu_{\mp}}{\mu_{\pm}} \frac{1}{k_s^2} \begin{bmatrix} \pm i k_x k_y k_{z\pm} & \pm i k_y^2 k_{z\pm} & i k_y k_s^2 \\ \mp i k_x^2 k_{z\pm} & \mp i k_x k_y k_{z\pm} & -i k_x k_s^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{g}_{T,\pm}^{TM}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Notons que ces dyades de Green vérifient les conditions de réciprocité suivantes, que l'on retrouve en particulier par une analyse attentive de leurs expressions spectrales,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{r}') \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \mu(\mathbf{r}) [\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^t, \\ \varepsilon(\mathbf{r}') \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \varepsilon(\mathbf{r}) [\underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^t, \\ k^2(\mathbf{r}') \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k^2(\mathbf{r}) [\underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^t. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Notons que, dans le cas d'un milieu multicouche, il suffit de remplacer la dyade de Green par une dyade qui est construite par les coefficients de transmission et réflexion [18].

## 2.4 Intégrales de Sommerfeld

Grâce à la symétrie radiale, on peut réduire l'équation (2.9) à une seule intégrale en opérant un changement vers les coordonnées polaires par rapport à  $\mathbf{r}'$  (position du point source) :

$$\begin{cases} k_x = k_s \cos \psi, \\ k_y = k_s \sin \psi, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{(x-x')}{\rho}, \\ \sin \phi = \frac{(y-y')}{\rho}, \end{cases}$$

où  $k_s = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$  représente la distance latérale, et  $\phi$  est l'angle azimutal (angle spatial dans les coordonnées cylindriques).



A partir de ces nouvelles variables et à partir de l'expression de la transformée de Fourier inverse, l'équation (2.5) devient comme suit :

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \hat{\underline{\mathbf{G}}}(k_s, z, z') k_s dk_s \int_0^{2\pi} e^{ik_s \rho \cos(\phi - \psi)} d\psi, \quad (2.20)$$

où la fonction de Bessel d'ordre 0 est donnée par :

$$J_0(k_s \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik_s \rho \cos(\phi - \psi)} d\psi, \quad (2.21)$$

Notons que la dépendance angulaire disparaît de l'équation (2.20) pour donner une intégrale à une seule dimension

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0 \left[ \hat{G}(k_s, z, z') \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(k_s \rho) k_s \hat{\underline{\mathbf{G}}}(k_s, z, z') dk_s. \quad (2.22)$$

L'expression générale d'une intégrale de Sommerfeld qui nous permet de déterminer chacun des neuf éléments de la dyade de Green du domaine spectral vers le domaine spatial est la suivante :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= S_n \left[ \hat{G}(k_s, z, z') \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_n(k_s \rho) k_s^{n+1} \hat{G}(k_s, z, z') dk_s, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(1)}(k_s \rho) k_s^{n+1} \hat{G}(k_s, z, z') dk_s, \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$ ,  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel d'ordre  $n$  et  $\hat{\underline{\mathbf{G}}}$  est la dyade de Green radiale, qui dépend seulement des variables  $k_s$ ,  $z$  et  $z'$  (et ne dépend donc pas expressément de  $k_x$  et  $k_y$ ).

Dans le cas général, lorsqu'on essaie de calculer cette intégrale, on risque de rencontrer trois difficultés :

1. Le domaine d'intégration s'étend à l'infini. Comme les éléments de  $\hat{\underline{\mathbf{G}}}$  sont généralement des fonctions compliquées, cette intégrale ne pourra être évaluée que d'une façon numérique.
2. Les éléments spectraux de  $\hat{\underline{\mathbf{G}}}$  présentent en général des pôles sur le trajet d'intégration, ce qui rend l'intégration délicate.
3. Cette intégrale inclut la fonction de Bessel  $J_n$  qui oscille rapidement lorsque la distance transversale entre le point source  $\mathbf{r}'$  et le point d'observation  $\mathbf{r}$  est grande, et aussi décroît très lentement pour de grands  $\rho$ .

On sait que chaque élément de la matrice de la dyade de Green ne dépend pas que de  $k_s$  mais aussi qu'il peut être exprimé en fonction de  $k_x$  et  $k_y$  ou les deux. On introduit une intégrale de Sommerfeld

pour chacun des éléments de la matrice  $\hat{\mathbf{G}}$  en prenant en compte les formules suivantes :

$$\begin{aligned} F^{-1} \left\{ \hat{G} \right\} &= S_0 \left[ \hat{G} \right], \\ F^{-1} \left\{ i k_x \hat{G} \right\} &= \cos \phi S_1 \left[ \hat{G} \right], \\ F^{-1} \left\{ i k_y \hat{G} \right\} &= \sin \phi S_1 \left[ \hat{G} \right], \\ F^{-1} \left\{ k_x^2 \hat{G} \right\} &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos 2\phi S_2 \left[ \hat{G} \right] - S_0 \left[ k_s^2 \hat{G} \right] \right\}, \\ F^{-1} \left\{ k_y^2 \hat{G} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos 2\phi S_2 \left[ \hat{G} \right] + S_0 \left[ k_s^2 \hat{G} \right] \right\}, \\ F^{-1} \left\{ k_x k_y \hat{G} \right\} &= -\frac{1}{2} \sin 2\phi S_2 \left[ \hat{G} \right], \end{aligned}$$

où  $\hat{G}$  est indépendante de  $k_x$  et de  $k_y$  et ne dépend que de  $k_s$ . Dans le domaine spatial, chaque élément de la dyade de Green peut être écrit en fonction d'une transformation de Sommerfeld de l'ordre  $n$  avec  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  ou une combinaison entre  $n = 2$  et  $n = 0$  et si nous utilisons l'égalité  $J_2(k_s \rho) = \frac{2}{\rho k_s} J_1(k_s \rho) - J_0(k_s \rho)$ , alors nous obtenons une combinaison entre  $n = 0$  et  $n = 1$ .

## 2.5 Vérification par la dyade de Green en espace libre

Si nous supposons que les deux milieux ont les mêmes caractéristiques, c-à-d  $k_- = k_+$ , alors on retrouve la configuration en espace libre. Dans ce cas, la partie transmise de la dyade de Green devrait donc être égale à la dyade de Green en espace libre. Nous réalisons alors une simulation avec  $k_- = k_+$  pour vérifier cette égalité afin de valider notre calcul de la partie transmise de la dyade de Green en demi-espace. Dans cette simulation, nous choisissons une source rayonnante à une fréquence de 300 MHz ( $\lambda = 1$  m) polarisée selon l'axe  $z$  à la position  $(0; 0; -2 \text{ m})$ . À défaut de vérifier l'égalité des deux dyades de Green en tout point de l'espace, nous nous contentons de la vérifier sur la ligne  $z = 0,5 \text{ m}$  et  $y = 0$ . Rappelons que l'interface est le plan  $z = 0$ . On trace ici la partie réelle et la partie imaginaire des éléments des dyades de Green  $G_{xz}$  et  $G_{zz}$  en espace libre et en demi-espace en fonction de  $\rho$ . Les figures 2.4 et 2.5 nous montrent que nous obtenons bien des courbes confondues, ce qui nous confirme la validité de la partie transmise de notre dyade de Green en demi-espace.

### 2.5.1 Comportement physique des intégrales de Sommerfeld

L'équation (2.23) s'écrit :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_n(k_s \rho) k_s^{n+1} \hat{G}(k_s) e^{\mp i(k_{z\mp} z - k_{z\pm} z')} dk_s. \quad (2.24)$$

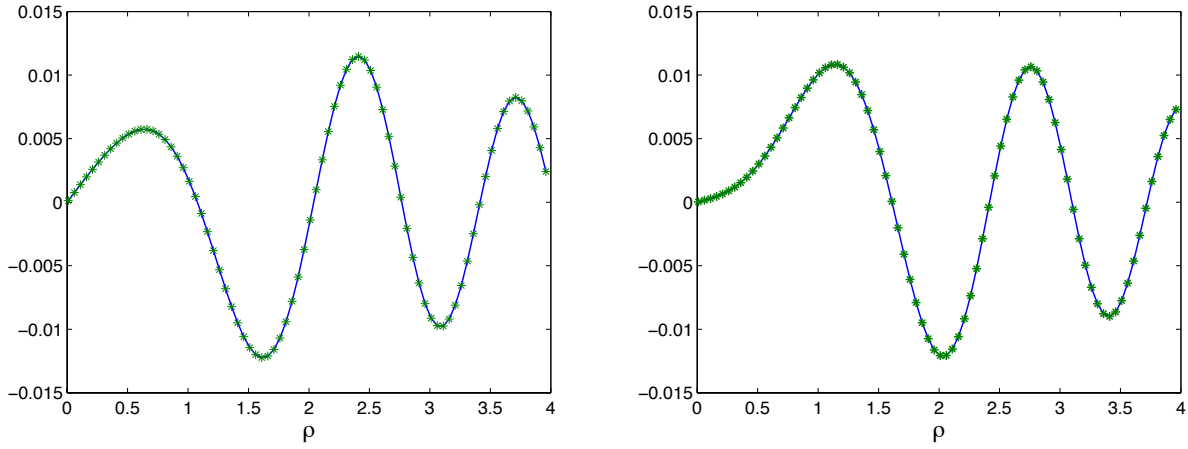


FIGURE 2.4 – La partie réelle (gauche) et la partie imaginaire (droite) de l'élément  $G_{xz}$  de la dyade de Green en espace libre et en demi-espace en fonction de  $\rho$  (trait continu : espace libre et \* : demi-espace).

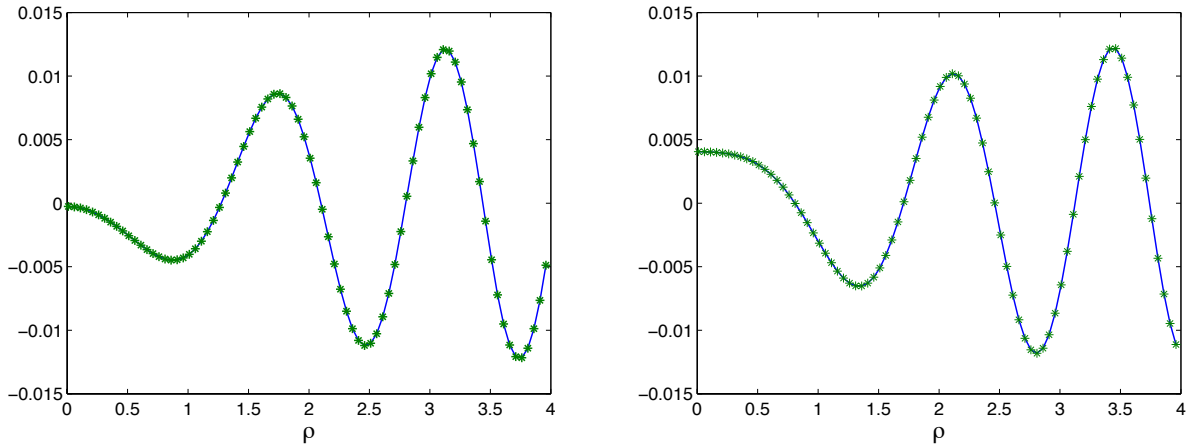


FIGURE 2.5 – La partie réelle et la partie imaginaire de l'élément  $G_{zz}$  de la dyade de Green en espace libre et en demi-espace en fonction de  $\rho$  (trait continu : espace libre et \* : demi-espace) .

Cette intégrale de Sommerfeld peut être interprétée comme la décomposition du champ en des ondes cylindriques et des ondes planes [54]. En effet, l'onde cylindrique est décrite par la fonction de Bessel  $J_n(\rho k_s)$ . Cette onde se propage parallèlement à l'interface avec un nombre d'onde  $k_s$ . Selon la direction  $z$ , l'onde est une onde plane qui peut être propagative ou évanescente ;

- Lorsque  $k_s < k_{\mp}$  l'onde devient plane et propagative selon l'axe  $z$  avec un nombre d'onde  $\gamma_{\mp} = ik_{z\mp} = i\sqrt{k_{\mp}^2 - k_s^2}$ .
- Lorsque  $k_s > k_{\mp}$  l'onde devient plane et évanescente selon l'axe  $z$  avec un nombre d'onde  $\gamma_{\mp} = \alpha_{z\mp} = \sqrt{k_s^2 - k_{\mp}^2}$ , voir Fig. 2.6.

## 2.6 Dyade de Green approchée

Le temps de calcul de la partie transmise et réfléchiée de la dyade de Green est assez long. Dans le chapitre 4, nous verrons que nous serons amenés à calculer cette dyade de Green quelques centaines

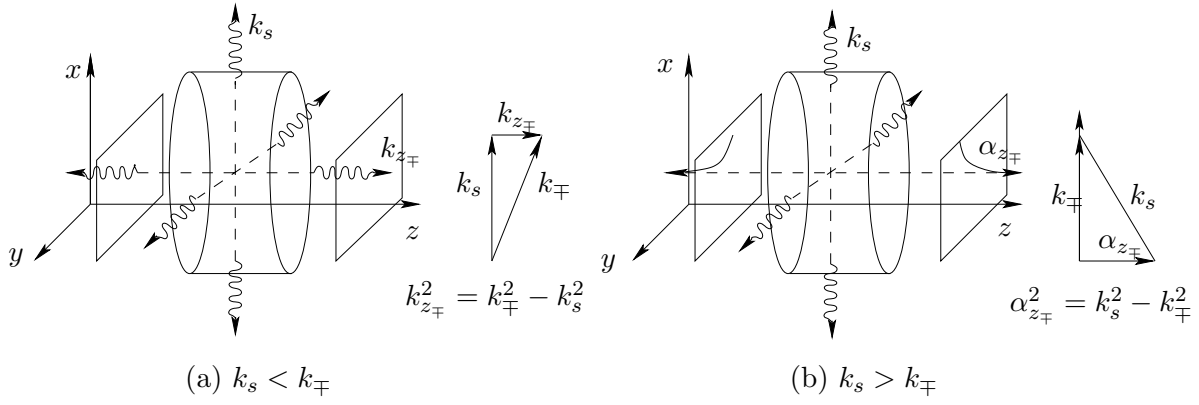


FIGURE 2.6 – Comportement des intégrales de Sommerfeld

de fois pour obtenir le résultat d'une seule simulation, ce qui rend le temps des simulations très long. Comme nous l'avons déjà expliqué, ceci vient du fait que l'on est obligé d'évaluer les éléments de la dyade de Green numériquement (intégration numérique).

Pour réduire ce temps de calcul nous avons intérêt à déterminer des expressions analytiques de chaque élément de la dyade. Chew et Cui [21] ont proposé trois méthodes pour accélérer le calcul de la dyade de Green. Ces méthodes sont intitulées : Revised Original Path (ROP), Steepest Descent Path (SDP), et Leading Order Approximation (LOA). Dans cette section, nous nous proposons d'étudier, une à une, ces trois méthodes. Ensuite, nous allons comparer leurs performances. Toutes les simulations seront conduites à la fréquence de 300 MHz.

### 2.6.1 Méthode “Revised Original Path” (ROP)

Cette méthode du « chemin original corrigé » consiste à déformer le chemin d'intégration. Nous passons du trajet original qui est l'axe des réels positifs où il n'y a pas de singularités à un trajet décalé de  $\delta$  (voir Fig. 2.7). Il faut que  $\delta$  soit de petite valeur [21]. Par exemple, cette dernière référence suggère  $\delta = 0.005k_0$ .

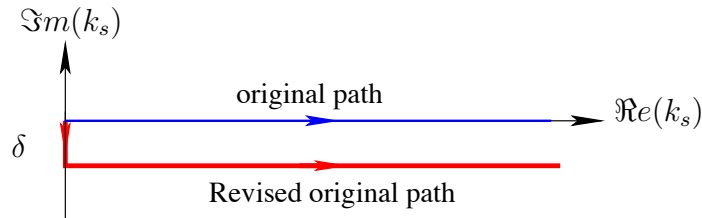


FIGURE 2.7 – Méthode Revised Original Path (ROP).

Cette méthode s'appuie sur le théorème de Cauchy et le fait qu'il n'existe pas de singularités entre les deux chemins.

## Simulations (ROP)

Nous comparons les éléments des dyades de Green  $G_{xz}^{ee,T}$  et  $G_{zz}^{ee,T}$  calculées de manière exacte à celle calculées de manière approchée par la méthode ROP en un point observateur ayant  $z = 0,5$  m et une distance latérale  $\rho$  (variable) lorsque le point émetteur est en  $z' = -1$  m avec l'hypothèse  $\varepsilon_- = 4\varepsilon_0$ . La figure 2.8 nous montre qu'on obtient des résultats identiques à partir des deux méthodes. L'erreur maximale est de l'ordre de  $10^{-9}$ . Notons, cependant, que cette méthode approchée ne nous a fait gagner que 5% du temps de calcul.

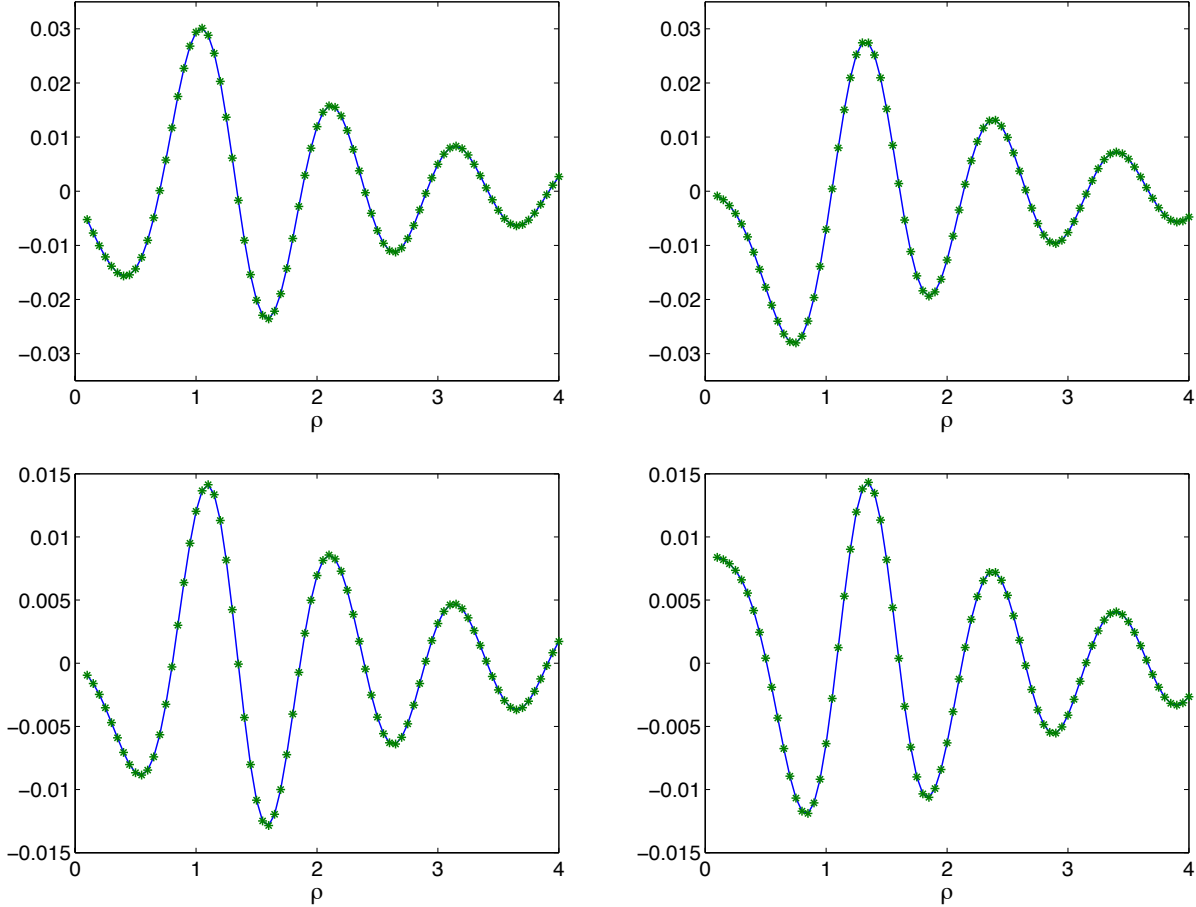


FIGURE 2.8 – Comparaison des parties réelle (courbes de droite) et imaginaire (courbes de gauche) de l'élément de la dyade de Green  $G_{xz}^{ee,T}$  (courbes en haut) et  $G_{zz}^{ee,T}$  (courbes en bas) calculées de manière exacte (courbe continue) et de manière approchée par la méthode ROP (courbe (\*)) en fonction de  $\rho$ .

### 2.6.2 Méthode “Steepest Descent Path” (SDP)

L'équation (2.23) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{G}(\rho, z, z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_s^{n+1} \widehat{\mathbf{G}}(k_s) \widehat{H}_n^{(1)}(k_s \rho) e^{i(k_s \rho + k_z z - k_{z'} z')} dk_s, \quad (2.25)$$

avec  $\hat{H}_n^{(1)} = H_n^{(1)} e^{-ik_s \rho}$ . D'après l'équation (2.25), on traite des intégrales du type :

$$I_s = \int_C e^{\Lambda h(k_s)} \hat{G}(k_s) dk_s, \quad (2.26)$$

où  $\Lambda h(k_s) = i(k_s \rho + k_z z - k_{z'} z')$  et  $C$  est un contour infini dans le plan complexe.

L'idée de cette méthode est basée sur la déformation du contour  $C$  en un nouveau chemin  $C'$  de telle sorte qu'une seule petite portion du trajet  $C'$  contribue réellement à l'intégrale. Si  $h(k_s)$  possède un point stationnaire à  $k_s = k_{s_0}$ , ce qui implique  $h'(k_{s_0}) = 0$ , alors

$$h(k_s) - h(k_{s_0}) \approx (k_s - k_{s_0})^2 \frac{h''(k_{s_0})}{2} + \dots, k_s \rightarrow k_{s_0},$$

nous obtenons  $\frac{k_{s_0}}{k_z} z + \frac{k_{s_0}}{k_{z'}} |z'| = \rho$ ,  $k_{s_0} = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$ , et  $z \tan \theta_1 + |z'| \tan \theta_2 = \rho$ .

Pour définir le chemin de plus grande pente traversant le point selle, on introduit le changement de variable suivant pour déformer le trajet d'intégration  $-s^2 = h(k_s) - k_{s_0}$ ,

$$I_s = e^{\Lambda h(k_{s_0})} \int_{C'} e^{-\Lambda s^2} \hat{g}(s) ds, \quad (2.27)$$

où  $\hat{g}(s) = \hat{G}(k_s) \frac{dk_s}{ds}$ .

$$I_s = e^{\Lambda h(k_{s_0})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Lambda s^2} \hat{g}(s) ds,$$

avec  $k_s = u + iv$  et  $v$  est donné en fonction de  $u$  [20]. Ce chemin traverse le point selle dans le plan  $k_s$  et intersecte l'axe  $u$  en  $k_- \sin \theta_0$  et  $k_- / \sin \theta_0$ .  $k_-$  ne contribue pas à l'intégrale. Lorsque  $k_+ > k_- \sin \theta_0$ , ce chemin ne traverse pas  $k_+$  et l'expression est indiquée dans [20]. Lorsque  $k_+ = k_- \sin \theta_0$  (angle critique défini par  $\theta_c = \sin^{-1} \frac{k_+}{k_-}$ ) l'onde se propage à l'interface. Lorsque  $k_+ < k_- \sin \theta_0$ , le chemin doit traverser  $k_+$ , donc on ajoute une autre intégrale autour de  $k_+$ , cf. [20].

## Simulations (SDP)

Dans le cas d'une polarisation des dipôles suivant l'axe  $z$ , on a besoin seulement des trois éléments de la matrice  $G_{zz}^{ee,T}$ ,  $G_{zx}^{ee,T}$  et  $G_{zy}^{ee,T}$ . On trace les parties réelles et imaginaires de l'élément  $G_{zz}^{ee,T}$  de la fonction de Green en fonction de la distance latérale  $\rho$  pour comparer la méthode SDP et ROP, en fixant le point émetteur en  $z' = 0,5$  m pour deux valeurs de  $z = 0,0001$  m et  $0,1$  m pour le point d'observation.

Les figures 2.9 et 2.10, nous montrent que la méthode SDP n'est très précise que lorsque  $z$  est proche de l'interface de l'ordre de  $0,0001$  m mais tout dépend aussi de  $\rho$ . Notons, toutefois, que les résultats restent acceptables même à  $z = 0,1$  m. On peut dire que cette méthode donne un meilleur résultat lorsque  $z$  est petit. Nos simulations confirment bien ce qui a été indiqué dans les articles de Chew et Cui [20] et [21]. Cependant, cette méthode n'a pas diminué le temps de calcul.

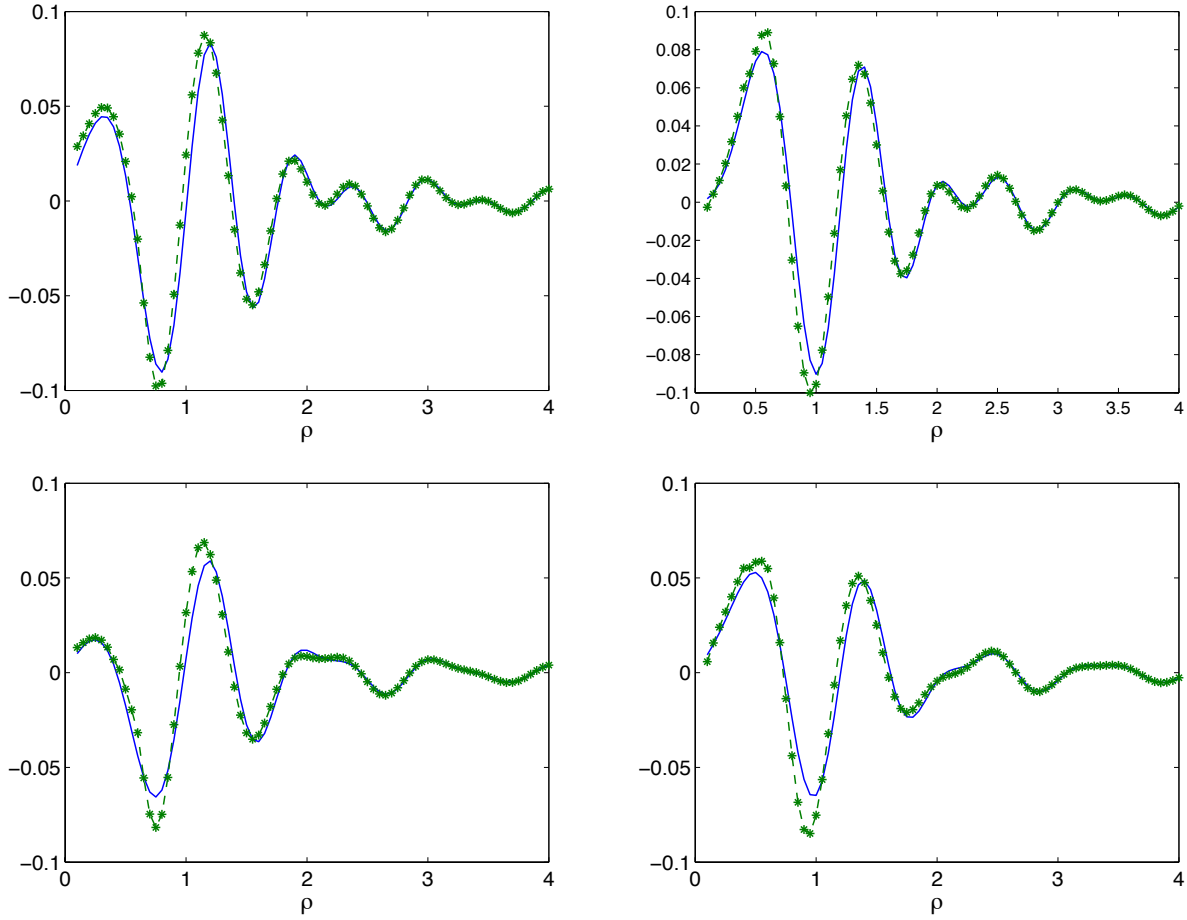


FIGURE 2.9 – Comparaison des parties réelle (courbes de droite) et imaginaire (courbes de gauche) de l'élément  $G_{zz}^{ee,T}$  de la dyade de Green calculées par SDP (courbe (\*)) et ROP (courbe continue) pour  $z = 0,0001$  m (courbes en haut) et  $z = 0,1$  m (courbes en bas), en fonction de  $\rho$ .

### 2.6.3 Méthode “Leading Order Approximation” (LOA)

La méthode « d'approximation au premier ordre » est basée sur la méthode de plus grande pente (SDP) qui commence par trouver le point selle en déformant le trajet d'intégration. La contribution est autour de  $s = 0$ ,  $G(s)$  peut être donné par la serie de Taylor  $\hat{g}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \frac{\hat{g}^{(n)}(0)}{n!} ds$ , donc l'expression devient comme suit

$$I \sim e^{\Lambda h(k_{s0})} \sqrt{\frac{\pi}{\Lambda}} \left[ \hat{g}(0) + \frac{\hat{g}''(0)}{4\Lambda} + \dots \right], \quad (2.28)$$

où  $\hat{g}(0) = \hat{G}(k_{s0}) \sqrt{\frac{-2}{h''(k_{s0})}}$ .

Nous ne prenons que l'ordre le plus élevé de l'expression (2.28). La méthode de Leading Order Approximation revient à calculer :

$$I_s \sim e^{\lambda h(k_{s0})} \hat{G}(k_{s0}) \sqrt{\frac{-2\pi}{\Lambda h''(k_{s0})}}, \quad (2.29)$$

où  $\lambda h(k_{s0}) = i \left[ \frac{k_+}{\cos \theta_+} z + \frac{k_-}{\cos \theta_-} |z'| \right]$  et  $\lambda h''(k_{s0}) = i \left[ \frac{k_2 \cos^3 \theta_2 z + k_+ \cos^3 \theta_1 |z'|}{k_- k_+ \cos^3 \theta_- \cos^3 \theta_+} \right]$ .

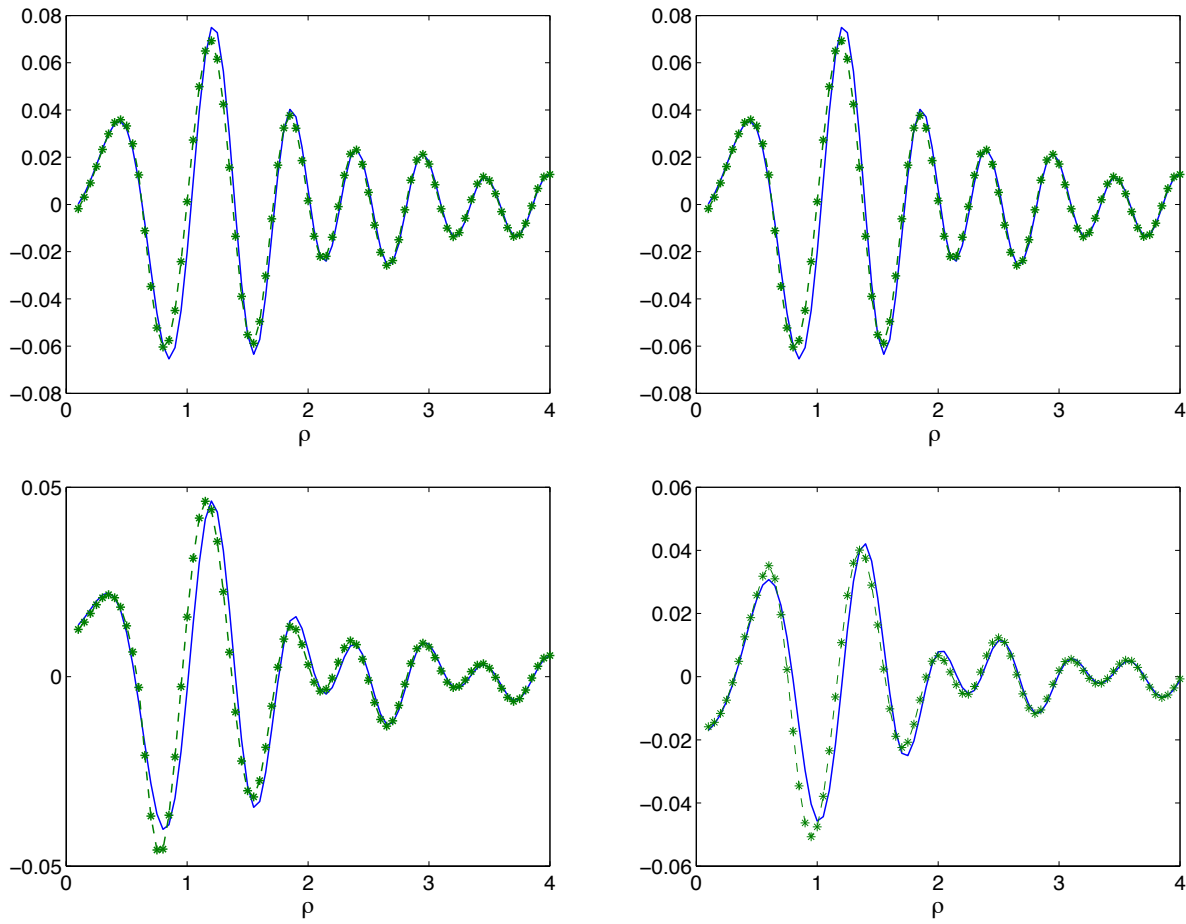


FIGURE 2.10 – Comparaison des parties réelle (courbes de droite) et imaginaire (courbes de gauche) de l'élément  $G_{zz}^{ee,T}$  de la dyade de Green calculées par SDP (courbe (\*)) et ROP (courbe continue) pour  $z = 0,0001$  m (courbes en haut) et  $z = 0,1$  m (courbes en bas), en fonction de  $\rho$ .

### Dyade de Green électrique-électrique par LOA

Dans le cas d'une polarisation d'un dipôle élémentaire selon l'axe  $z$ , situé en  $\mathbf{r}'$  où les deux milieux sont diélectriques (i.e.,  $\mu_+ = \mu_- = \mu_0$ ), nous voulons déterminer les trois composantes du champ électrique au point  $\mathbf{r}$ . Donc nous avons besoin seulement des trois éléments de la matrice :  $G_{zz}^{ee,T}$ ,  $G_{zx}^{ee,T}$  et  $G_{zy}^{ee,T}$ .

En appliquant (2.29), on obtient les résultats suivants :

$$G_{zx}^{ee,T} \sim \frac{i(x-x')}{4\pi} \frac{k_-^2 \cos^3 \theta_- \cos^3 \theta_+ e^{i\left[\frac{k_+}{\cos \theta_+} z + \frac{k_-}{\cos \theta_-} |z'|\right]}}{\sqrt{(k_- \cos \theta_- z + k_+ \cos \theta_+ |z'|)^3 (k_- \cos^3 \theta_- z + k_+ \cos^3 \theta_+ |z'|)}} \hat{G}_{zx}^{TM,T}(k_{s_0}),$$

$$G_{zy}^{ee,T} \sim \frac{i(y-y')}{4\pi} \frac{k_-^2 \cos^3 \theta_- \cos^3 \theta_+ e^{i\left[\frac{k_+}{\cos \theta_+} z + \frac{k_-}{\cos \theta_-} |z'|\right]}}{\sqrt{(k_- \cos \theta_- z + k_+ \cos \theta_+ |z'|)^3 (k_- \cos^3 \theta_- z + k_+ \cos^3 \theta_+ |z'|)}} \hat{G}_{zy}^{TM,T}(k_{s_0}),$$

$$G_{zz}^{ee,T} \sim \frac{1}{4\pi k_+} \frac{k_- \cos^2 \theta_- \cos^2 \theta_+ e^{i\left[\frac{k_+}{\cos \theta_+} z + \frac{k_-}{\cos \theta_-} |z'|\right]}}{\sqrt{(k_2 \cos \theta_- z + k_+ \cos \theta_+ |z'|)(k_- \cos^3 \theta_- z + k_+ \cos^3 \theta_+ |z'|)}} \hat{G}_{zz}^{TM,T}(k_{s_0}).$$



### Simulations (LOA)

On trace les parties réelles et imaginaires de l'élément  $G_{xz}^{ee,T}$  et  $G_{zz}^{ee,T}$  de la dyade de Green en fonction de  $\rho$  pour  $z = 0,5$  m et 1 m et  $z' = -0,5$  m pour comparer les méthodes approchées (LOA) et (ROP).

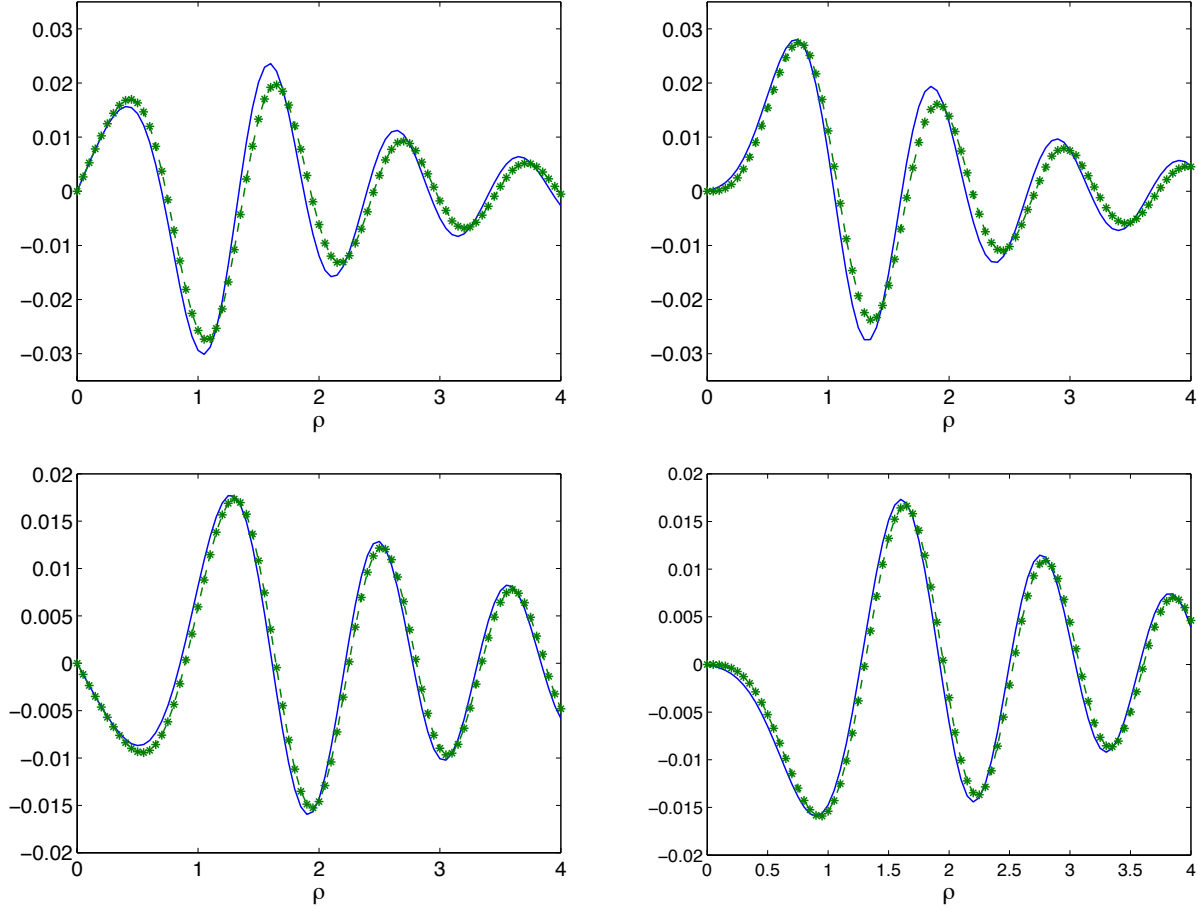


FIGURE 2.11 – Comparaison des parties réelle (courbes de droite) et imaginaire (courbes de gauche) de l'élément  $G_{zx}^{ee,T}$  de la dyade de Green calculées par LOA (courbe (\*)) et ROP (courbe continue) pour  $z = 0,5$  m (courbes en haut) et  $z = 1$  m (courbes en bas), en fonction de  $\rho$ .

D'après les figures 2.11 et 2.12, on constate que la méthode LOA donne des valeurs relativement imprécises lorsque  $z$  est petit et que cette méthode n'étant particulièrement précise que lorsque  $z > \lambda$  (à cause de l'angle critique où l'onde se propage le long de l'interface). Par contre, pour  $z$  petit, les simulations nous montrent que la méthode de plus grande pente (SDP) est plus efficace. Signalons que la méthode LOA nous a permis de diminuer considérablement le temps de calcul (de l'ordre de 50%).

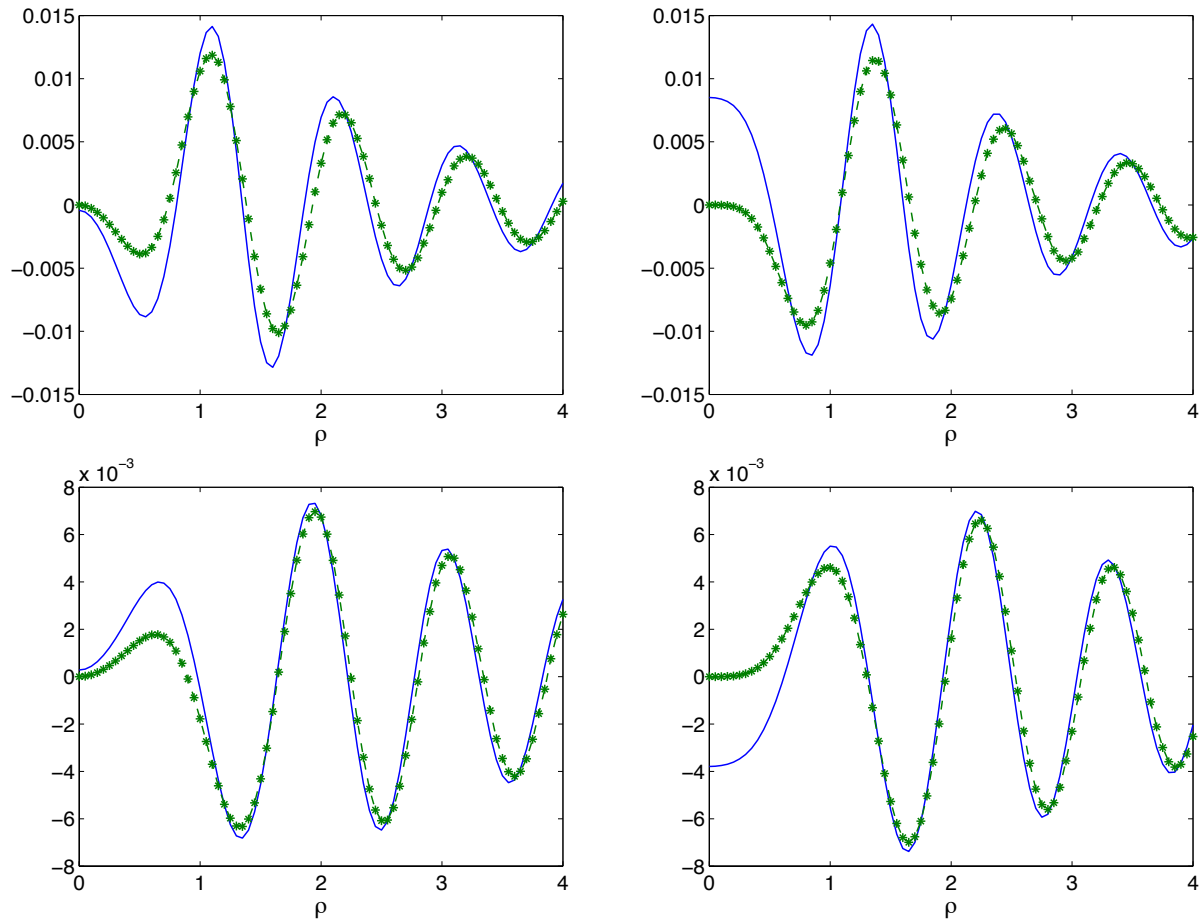


FIGURE 2.12 – Comparaison des parties réelle (courbes de droite) et imaginaire (courbes de gauche) de l'élément  $G_{zz}^{ee,T}$  de la dyade de Green calculés par LOA (courbe (\*)) et ROP (courbe continue) pour  $z = 0, 5$  m (courbes en haut) et  $z = 1$  m (courbes en bas), en fonction de  $\rho$ .

## 2.7 Représentation du champ par la fomulation intégrale

Soit  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  les champs électromagnétiques en présence des inclusions  $\mathcal{I}_\alpha$ . Ces champs satisfont les équations aux dérivées partielles et les conditions de rayonnement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_\alpha \mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_0(\mathbf{r}), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] = 0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

A partir de (2.30), le champ électrique satisfait donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mu_\alpha^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{J}_0(\mathbf{r}), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - ik\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Soit  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  et  $V$  un domaine qui contient l'ensemble des inclusions. En multipliant la première équation de (2.31) par  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}$  et en intégrant par parties sur le volume  $V$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_V d\mathbf{r} \left[ \nabla \times \mu_\alpha^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} \\ &= \oint_{\partial V} d\sigma \nu \cdot \mu^{-1}(\mathbf{r}) \left[ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \mathbf{a} + \mu^{-1}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r} \left[ (\mu_\alpha^{-1}(\mathbf{r}) - \mu^{-1}(\mathbf{r})) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - \omega^2 (\varepsilon_\alpha(\mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{r})) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \mathbf{a} = \int_V d\mathbf{r} i\omega \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de rayonnement satisfaite par  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  et  $\mathbf{E}$ , nous trouvons que le premier terme s'annule. D'où

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}') - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}') \\ &= \mu(\mathbf{r}') \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r} \left[ \left( \frac{1}{\mu_-} - \frac{1}{\mu_j} \right) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \omega^2 (\varepsilon_j - \varepsilon_-) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]. \end{aligned}$$

Nous prenons le transposé de l'équation et, en notant que  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ \frac{i\omega \varepsilon(\mathbf{r}')}{\varepsilon(\mathbf{r})} \left( \frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_-} \right) \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_j - \varepsilon_-) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned}$$

L'équation intégrale de Lippmann-Schwinger du champ électrique diffracté en présence des inclusions en demi-espace est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ \frac{i\omega \varepsilon_-}{\varepsilon(\mathbf{r})} (\mu_j - \mu_-) \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \mu_- (\varepsilon_j - \varepsilon_-) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

A partir des principes de dualité ci-dessous rappelés :

$$\underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.33)$$

$$\underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.34)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{H}, \\ \mu &\rightarrow -\varepsilon, \\ \varepsilon &\rightarrow -\mu, \\ J &\rightarrow -M, \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation intégrale du champ magnétique diffracté en demi-espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = & \sum_{j=1}^m \int_{D_j} d\mathbf{r}' \left[ \frac{i\omega\mu_-}{\mu(\mathbf{r})} (\varepsilon_j - \varepsilon_-) \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right. \\ & \left. + \omega^2 \varepsilon_- (\mu_j - \mu_-) \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.8 Formule asymptotique du champ diffracté

A partir de la formulation intégrale, nous obtenons la formule asymptotique du champ diffracté en demi-espace par une collection d'inclusions illuminées par une onde incidente [37]. Cette formule n'est appropriée que lorsque la taille de chaque inclusion est suffisamment petite devant la longueur d'onde d'enfouissement ( $\alpha \ll \lambda_-$ ). Comme déjà mentionné précédemment, cette formule est fonction de la position du point d'observation  $\mathbf{r}$ , du point source  $\mathbf{r}'$  et des inclusions  $\mathbf{x}_j$ . Le point d'observation et le point source peuvent être situés dans le même milieu ou chacun dans son propre milieu. La formule asymptotique du champ électrique diffracté est la suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = & \alpha^3 \sum_{j=1}^m \left[ \frac{i\omega\varepsilon_- \mu_-}{\varepsilon(\mathbf{r})} \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_-}; V_j \right) \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j) \right. \\ & \left. + k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_-}; V_j \right) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \right] + O(\alpha^4), \end{aligned} \quad (2.36)$$

Par dualité, nous obtenons la formule asymptotique du champ magnétique diffracté en demi-espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = & \alpha^3 \sum_{j=1}^m \left[ \frac{-i\omega\varepsilon_- \mu_-}{\mu(\mathbf{r})} \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_-}; V_j \right) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_j) \right. \\ & \left. + k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_-}; V_j \right) \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_j) \right] + O(\alpha^4), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$\underline{\mathbf{M}}_g(q_j/q_-; V_j)$  (i.e.,  $q_j/q_- = \varepsilon_j/\varepsilon_-; \mu_j/\mu_-$  est le tenseur de polarisation qui contient une information sur le volume  $V_j$  et le contraste  $q_j/q_-$  entre l'inclusion  $j$  et le milieu extérieur. A partir de l'expression (2.36), nous pouvons obtenir le champ diffracté par un conducteur électrique parfait (PEC) en faisant tendre la permittivité de l'inclusion vers l'infini ( $\varepsilon_j \rightarrow \infty$ ) et la perméabilité vers zéro ( $\mu_j \rightarrow 0$ ). A partir de l'expression (2.37), nous obtenons le cas d'un conducteur magnétique parfait (PMC) en faisant tendre la permittivité de l'inclusion vers zéro ( $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ) et la perméabilité vers l'infini ( $\mu_j \rightarrow \infty$ ). Nous obtenons le champ diffracté à une précision de l'ordre  $\alpha^4$ . Rappelons que lorsque l'inclusion  $V_j$  est symétrique par rapport à son centre, le terme puissance  $\alpha^4$  s'annule et nous obtenons une précision de l'ordre  $\alpha^5$ . C'est le cas, entre autre, des inclusions sphériques et ellipsoïdales que nous allons traiter par la suite.

## 2.9 Tenseur de polarisation pour une inclusion éloignée de l'interface

Si les inclusions sont supposées éloignées de l'interface alors le couplage entre les inclusions et l'interface peut être ignoré. Ces inclusions sont placées dans le milieu inférieur. Le tenseur de polarisation  $\underline{\mathbf{M}}_g(\mu_j/\mu_-; V_j)$  en demi-espace lorsque l'inclusion est loin de l'interface prend l'expression du tenseur de polarisation qui est décrite dans le chapitre précédent pour le cas d'une inclusion isolée dans un espace libre de permittivité  $\varepsilon_-$  et de perméabilité  $\mu_-$ .

## 2.10 Tenseur de polarisation pour une sphère proche de l'interface

Si la sphère est loin de l'interface, l'effet du couplage avec l'interface est donc ignoré. Si la sphère est proche de l'interface, on doit s'intéresser à l'influence du couplage entre la sphère et l'interface. Pour cela, on fait intervenir un nouveau tenseur de polarisation calculé par une approche basée sur le système de coordonnées bisphériques, qui s'adapte parfaitement à cette configuration.

### 2.10.1 Expression du tenseur de polarisation

Le cas de deux sphères couplées a été traité dans le chapitre précédent en utilisant une approche basée sur les coordonnées bisphériques pour déterminer le tenseur de polarisation. Pour traiter le cas d'une inclusion sphérique proche de l'interface ( $z = 0$ ), on utilise la même approche. En effet, cela revient, dans ce cadre, à considérer le cas limite de deux sphères couplées lorsque le rayon de la seconde sphère tend vers l'infini ce qui traduit par  $\zeta_2 = 0$ . Cette sphère se transforme alors en une interface plane qui sépare les deux milieux. En dessous de l'interface, dans le demi-espace inférieur noté "–" et qui est de permittivité  $\varepsilon_-$  et de perméabilité  $\mu_-$ , nous trouvons la sphère  $\zeta = -\zeta_1$  de rayon  $a_1$  et de volume  $|V_1| = \frac{4\pi}{3}a_1^3$  (voir Fig. 2.13). Ce qui nous permet de traiter le tenseur de polarisation  $\underline{\mathbf{M}}_g(\gamma_1 = q_1/q_-; V_1)$  en prenant en compte l'interaction entre l'interface et la sphère. Le tenseur de polarisation devient comme suit :

$$\underline{\mathbf{M}}_g(\gamma_1; V_1) = (\gamma_1 - 1)^2 \int_{s_1} \hat{\nu} \mathbf{u}^+(\mathbf{r}, \gamma_1) ds(r) + (\gamma_1 - 1)|V_1| \underline{\mathbf{I}}, \quad (2.38)$$

où  $\hat{\nu}$  est le vecteur normal sortant.

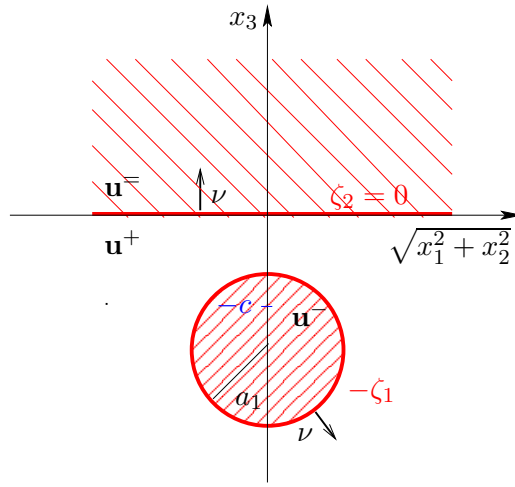


FIGURE 2.13 – Une inclusion sphérique proche de l'interface

Le tenseur de polarisation est défini pour être la solution du problème de transmission suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^- = 0, \\ \Delta u_i^{\bar{-}} = 0, \\ \Delta u_i^+ = 0, \\ u_i^+ = u_i^-, \quad \zeta = -\zeta_1 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^+ = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^- + \hat{\nu} \cdot \hat{x}_i, \quad \zeta = -\zeta_1, \\ u_i^+ = u_i^{\bar{-}}, \quad \zeta_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^+ = \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \nu} u_i^{\bar{-}}, \quad \zeta_2 = 0, \\ u_i^+ = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (2.39)$$

où  $u_i^-$  est le potentiel vectoriel à l'intérieur du milieu supérieur  $x_3 > 0$ ,  $u_i^{\bar{-}}$  est le potentiel vectoriel de la sphère pour  $x_3 < 0$  et  $u_i^+$  est le potentiel vectoriel du milieu d'enfouissement,  $i = 1, 2$  et  $3$ . Pour déterminer l'expression (2.38), nous avons besoin de calculer le potentiel  $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, u_2^+, u_3^+)$  du milieu où se trouve la sphère. Les expressions du potentiel vectoriel  $\mathbf{u}^+(\mathbf{r}, \gamma) = (u_1^+, u_2^+, u_3^+)$  pour  $-\zeta_1 < \zeta < 0$ , sont données par

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_n^{(1)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi, \\ u_2^+ &= \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_n^{(2)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(2)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n^1(\cos \theta) \sin \phi, \\ u_3^+ &= \sqrt{R(\zeta, \theta)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( C_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pour retrouver les coefficients  $C_n^{(i)}$  et  $D_n^{(i)}$ , nous utilisons les conditions de transmission (2.38). Ces coefficients sont donnés dans [24]. Nous pouvons obtenir les expressions des éléments diagonaux du tenseur de polarisation de la sphère :

- $M_{11}$  et  $M_{22}$  représentent les composantes parallèles à l'interface,
- $M_{33}$  représente la composante perpendiculaire à l'interface.

$$\begin{aligned}
M_{11}(\gamma_1; V_1) &= M_{22}(\gamma_1; V_1) = (\gamma_1 - 1)\pi c^2 \sinh \zeta_1 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{R(\zeta, \theta)^{\frac{5}{2}}} \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n^{(1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + D_n^{(1)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1}) \\
&\quad \times P_n^1(\cos \theta) d\theta + |V_1|, \\
M_{33}(\gamma_1; V_1) &= (\gamma_1 - 1)2\pi c^2 \sinh \zeta_1 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R(\zeta, \theta)^{\frac{5}{2}}} [-\sinh \zeta_1 + R(\zeta_0, \theta) \coth \zeta_1] \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{+\infty} (C_n^{(3)} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + D_n^{(3)} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1}) P_n(\cos \theta) d\theta + |V_1|.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

### 2.10.2 Comportement des éléments du tenseur de polarisation

Pour le cas d'une inclusion enfouie sous l'interface, les éléments du tenseur de polarisation calculés via les coordonnées bisphériques doivent être déterminés numériquement. Le nombre  $N$  est déterminé d'une manière itérative en remplaçant les sommes infinies  $\sum_{n=0,1}^{+\infty}$  par des sommes finies  $\sum_{n=0,1}^N$  où  $N$  est choisi de telle sorte que la correction de l'ordre  $(N+1)$  par rapport à l'ordre  $(N)$  soit inférieure à un seuil de convergence pris ici égal à  $10^{-15}$ . Dans le tableau 2.1, on prend en exemple le cas d'une inclusion diélectrique de rayon  $a = 0,05$  m et de (forte) permittivité  $\varepsilon = 12\varepsilon_0$ , placée dans le milieu d'enfouissement de permittivité  $\varepsilon_- = 4\varepsilon_0$ . Cette sphère est éloignée de l'interface d'une distance  $d$  par rapport à son centre. Ce tableau nous montre que plus la sphère est proche de l'interface plus  $N$  est grand.

$d$ (m)	Erreur	N
0,051	$O(10^{-15})$	81
0,055	$O(10^{-15})$	44
0,06	$O(10^{-15})$	32
0,07	$O(10^{-15})$	23
0,08	$O(10^{-15})$	19
0,09	$O(10^{-15})$	17
0,1	$O(10^{-15})$	15
0,2	$O(10^{-15})$	10
0,3	$O(10^{-15})$	9
0,6	$O(10^{-15})$	7

TABLE 2.1 – Choix du nombre  $N$  dans le cas d'une inclusion diélectrique enfouie sous l'interface.

Pour analyser le comportement de chaque élément du tenseur de polarisation, nous traçons, en fonction de  $d$ , les éléments diagonaux du tenseur de polarisation calculés à travers les coordonnées bisphériques comparés à ceux d'une sphère isolée en espace libre, où  $a$  est le rayon de la sphère et  $d$  est la profondeur de son centre. On considérera toujours que  $d > a$  pour éviter que la sphère ne

touche l'interface.

La figure 2.14 nous montre que lorsque  $d > 3a$ , les tenseurs sont presque identiques, et la sphère agit comme une sphère isolée en espace libre. Lorsque  $d < 3a$ , la sphère se rapproche de plus en plus de l'interface (sans contact), et les éléments du tenseur de polarisation se séparent de plus en plus. Cependant, la différence par rapport à la valeur de la sphère isolée ne dépasse pas 6%.

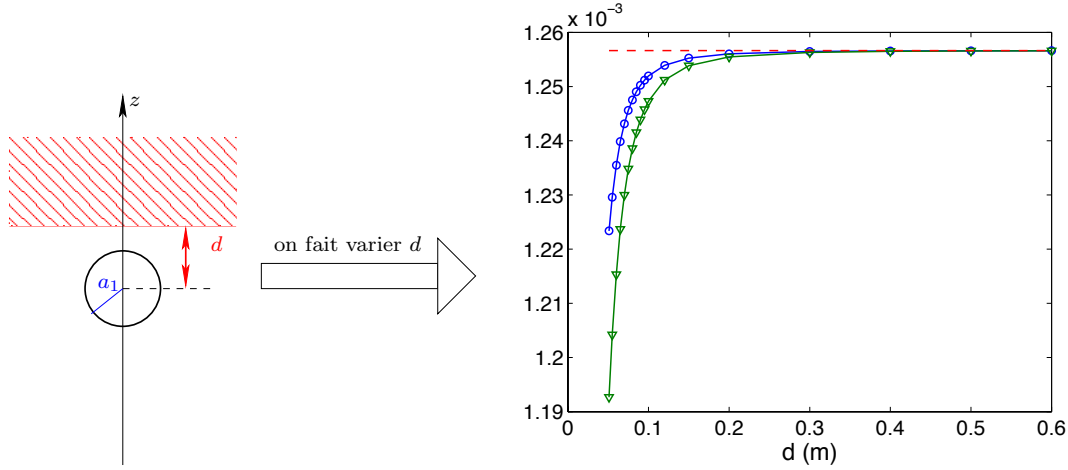


FIGURE 2.14 – Les éléments du tenseur de polarisation  $M_{11}$  et  $M_{22}$  (courbe (o)),  $M_{33}$  (courbe (triangle)) calculés par les coordonnées bisphériques en fonction de  $d$ , sont comparés à celui d'une sphère isolée en espace libre (courbe (—)) pour une sphère de rayon 0,05 m et de permittivité  $3\varepsilon_-$ .

Sur la figure 2.15, on prend le cas d'une sphère enfouie sous l'interface de rayon 0.025 m de permittivité relative 3, et le cas d'une sphère de rayon 0,05 m (c-à-d le double) et de même permittivité relative. On trace les éléments du tenseur de polarisation pour chacune des deux configurations en fonction de la distance  $d$ . On trouve que la plus petite sphère atteint la valeur d'une sphère isolée à une précision de 1% avant la plus grande sphère. En effet, la plus petite sphère se comporte comme une sphère isolée à partir d'une distance  $d = 0,045$  m et la plus grande sphère à partir d'une distance  $d = 0,09$  m. Donc on peut dire que plus la sphère est grande plus l'effet du couplage entre la sphère et l'interface est important.

On considère deux configurations pour lesquelles les sphères sont de même rayon 0,05 m et de permittivités différentes. Dans la première configuration on considère une sphère de permittivité relative 3 et dans l'autre configuration une sphère de permittivité relative 5. On trace sur la figure 2.16 les éléments du tenseur de chaque sphère enfouie sous l'interface en fonction de  $d$ . On observe que la sphère de permittivité relative 3 atteint la valeur d'une sphère isolée avant la sphère de permittivité relative 5, à une précision de 1%. A une distance  $d = 0,09$  m, la sphère de plus petite permittivité se comporte comme une sphère isolée alors qu'il faut une distance  $d = 0,1$  m pour la sphère de plus grande permittivité pour qu'elle se comporte comme une sphère isolée. On constate que l'interface a une influence sur la sphère de plus forte permittivité c'est-à-dire que plus la sphère est de grande permittivité plus l'effet du couplage avec l'interface est important.



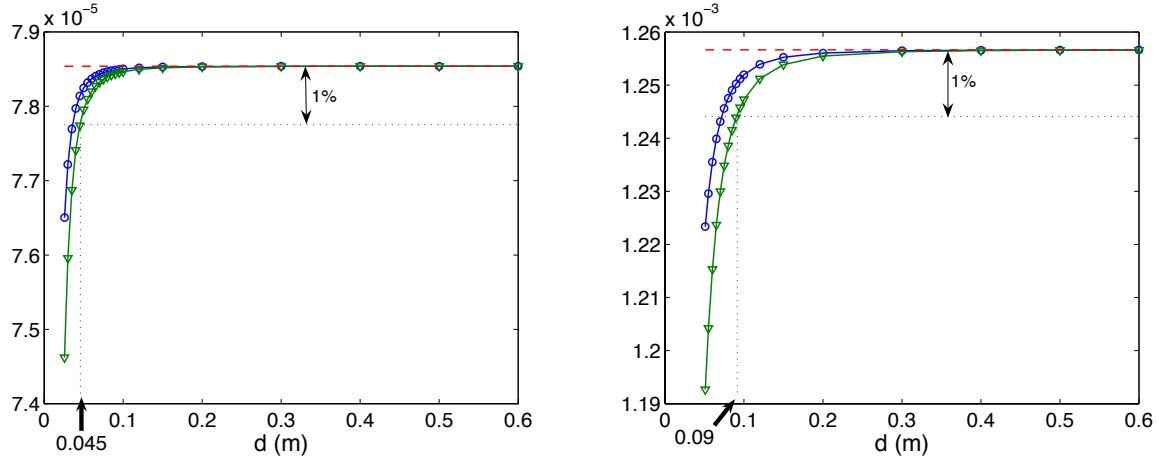


FIGURE 2.15 – Les éléments du tenseur de polarisation  $M_{11}$  et  $M_{22}$  (courbe (o)),  $M_{33}$  (courbe (triangle)) calculés par les coordonnées bisphériques en fonction de  $d$ , sont comparés à celui d'une sphère isolée en espace libre (courbe (—)) pour deux sphères de même permittivité  $3\varepsilon_-$  et de différents rayons  $a = 0,025$  m (courbe de gauche) et  $a = 0,05$  m (courbe de droite).

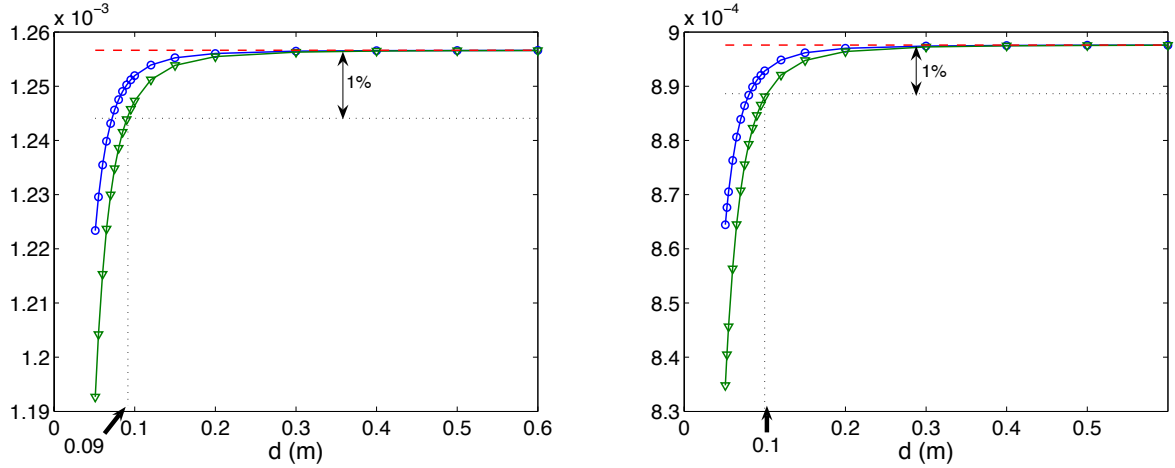


FIGURE 2.16 – Les éléments du tenseur de polarisation  $M_{11}$  et  $M_{22}$  (courbe (o)),  $M_{33}$  (courbe (triangle)) calculés par les coordonnées bisphériques en fonction de  $d$ , sont comparés à celui d'une sphère isolée en espace libre (courbe (—)) pour deux sphères de même rayon  $a = 0,05$  m et de différentes permittivités  $\varepsilon = 3\varepsilon_-$  (courbe à gauche) et  $\varepsilon = 5\varepsilon_-$  (courbe à droite).

### 2.10.3 Effet du couplage

Pour étudier l'effet du couplage entre la sphère et l'interface, nous comparons la différence d'amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté  $||E_{z(\text{avec couplage})} - E_{z(\text{sans couplage})}||$  calculé par la formule asymptotique avec couplage (tenseur calculé par les coordonnées bisphériques) et sans couplage (tenseur d'une sphère isolée).

On prend la configuration suivante : on fixe tout d'abord un dipôle à la position  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 0,5$  m) orienté selon  $z$  et émettant à une fréquence de 300 MHz. Ce dipôle se trouve dans le demi-espace supérieur de caractéristiques  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Il éclaire une sphère diélectrique de rayon  $0,05$  m  $= \lambda_-/10$

et de permittivité  $12\varepsilon_0$  enfouie sous l'interface à une profondeur  $d$ . Le milieu d'enfouissement est de permittivité  $4\varepsilon_0$ . Voir Fig. 2.19.

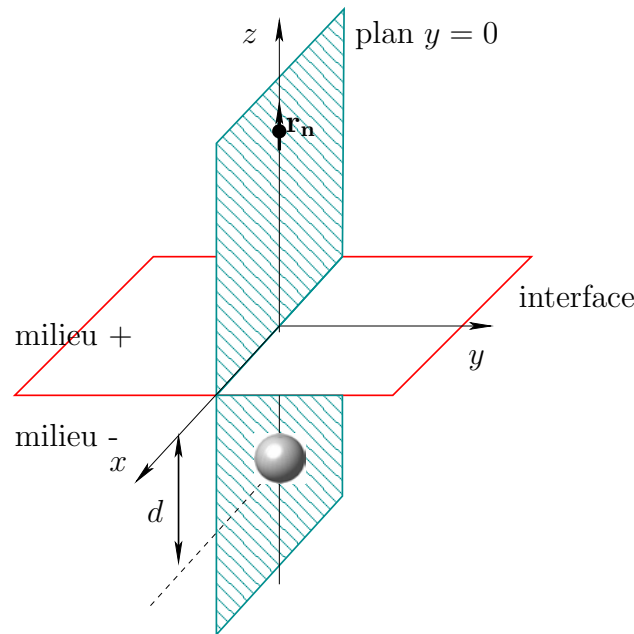


FIGURE 2.17 – Le plan d'observation  $y = 0$  pour un dipôle placé en  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 1,2 \text{ m})$ .

Dans le plan  $y = 0$ , on s'intéresse à la différence d'amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté avec et sans couplage, pour différentes distances  $d = 0,5; 0,2$  et  $0,1 \text{ m}$ .

Les simulations de la figure 2.18 nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

- L'effet du couplage n'est ressenti fortement que dans un voisinage autour de l'inclusion.
- L'effet du couplage est de plus en plus fort quand la sphère se rapproche de l'interface. Ainsi pour  $d = 0,1 \text{ m}$  l'écart maximal est de  $0,4 \text{ V/m}$  alors que pour  $d = 0,2 \text{ m}$  il est de  $0,25 \text{ V/m}$  et pour  $d = 0,5 \text{ m}$  il n'est que de  $0,035 \text{ V/m}$ . D'ailleurs, la courbe de droite de la figure 2.15, qui traite de la même sphère, montre bien que les éléments du tenseur de polarisation pour  $d = 0,1 \text{ m}$  sont nettement différents de ceux pour  $d = 0,2 \text{ m}$  et encore plus pour  $d = 0,5 \text{ m}$  où ces éléments se rapprochent fortement des valeurs du cas d'une sphère isolée.
- L'effet du couplage n'est ressenti au niveau du demi-espace supérieur que lorsque la sphère est très proche de l'interface (cas de  $d = 0,1 = \lambda_-/5$ ). Et même dans ce cas, l'effet n'est ressenti fortement qu'au voisinage immédiat de l'interface.

## 2.11 Interaction entre des inclusions en utilisant le modèle de Foldy-Lax

Dans le cas d'une inclusion proche de l'interface, l'interaction entre la sphère et l'interface peut être considérée en introduisant un nouveau tenseur de polarisation obtenu via les coordonnées bisphériques. Dans le cas de plusieurs inclusions proches de l'interface, nous introduisons le modèle

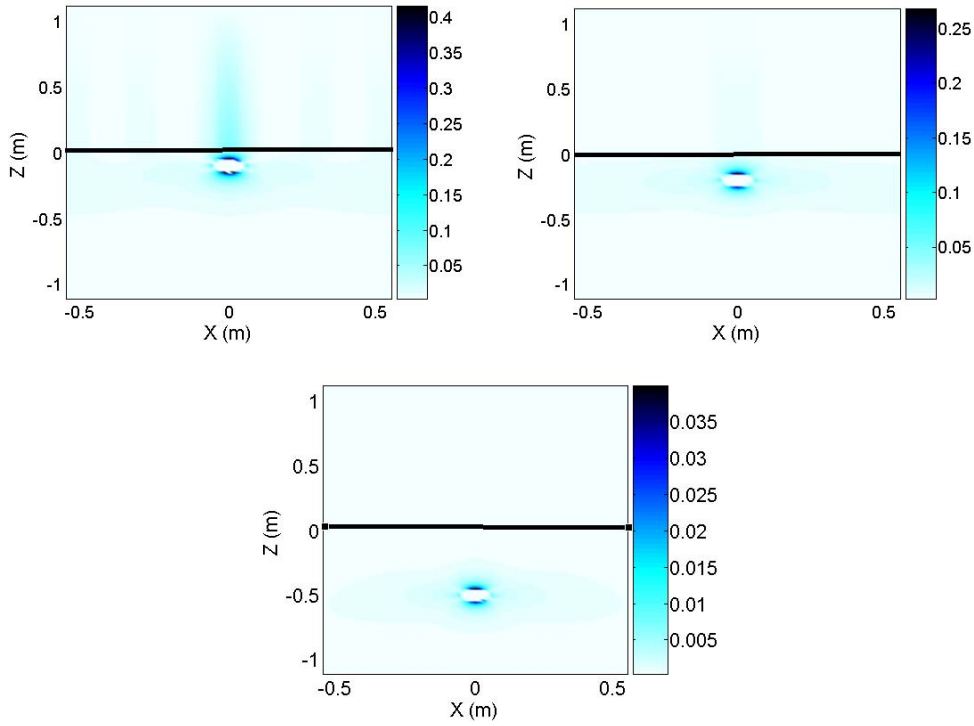


FIGURE 2.18 – La différence d’amplitude de la composante verticale du champ diffracté sur le plan  $y = 0$  calculé par la formule asymptotique avec couplage (coordonnées bisphériques) et sans couplage pour différentes distances  $d$  :  $d = 0,5 \text{ m} = \lambda_-$  (courbe haut gauche);  $d = 0,2 \text{ m} = 4\lambda_-/5$  (courbe haut droite);  $d = 0,1 \text{ m} = \lambda_-/5$  (courbe bas), pour une sphère de rayon  $\lambda_-/10$  et de permittivité  $3\varepsilon_-$ .

de Foldy-Lax dans la formule asymptotique du champ diffracté, ce qui prend en compte l’interaction entre l’interface et les inclusions d’une part et le couplage entre les inclusions elles mêmes. Ces inclusions peuvent être de forme arbitraires.

Nous allons intégrer le modèle de Foldy-Lax à la formule asymptotique puisque les  $m$  inclusions sont supposées de petites tailles de telle sorte que chaque inclusion est assez petite devant la longueur d’onde du milieu d’enfouissement. Donc, le champ à l’intérieur de chaque inclusion peut être supposé uniforme. Chaque petite inclusion est considérée comme un dipôle.

Le champ à l’intérieur de chaque inclusion  $l$  est le champ incident auquel on ajoute le champ diffracté par toutes les autres  $m - 1$  inclusions dû au champ total à la position de ces inclusions. Les formules intégrales de Lippmann-Schwinger du champ total électrique et magnétique dans

l'inclusion  $l$  deviennent comme suit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_l) + \alpha^3 \sum_{l \neq j}^m \left[ \frac{i\omega\varepsilon_- \mu_-}{\varepsilon(\mathbf{x}_l)} \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_-}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right. \quad (2.42)$$

$$\left. + k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_-}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right] \quad (2.43)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_l) + \alpha^3 \sum_{l \neq j}^m \left[ \frac{-i\omega\varepsilon_- \mu_-}{\mu(\mathbf{x}_l)} \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_-}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right. \\ \left. + k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_-}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right],$$

Insistons ici sur le fait que les  $\underline{\mathbf{G}}^{me}$ ,  $\underline{\mathbf{G}}^{em}$ ,  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  et  $\underline{\mathbf{G}}^{mm}$  sont les dyades de Green pour lesquelles le point source et le point d'observation sont situés dans le même milieu. Donc nous avons besoin de calculer leurs termes source et leurs termes de réflexion.

Le champ dans chaque inclusion  $j$  est obtenu en résolvant un système d'équations linéaires de dimension  $6m \times 6m$  représenté dans (2.42). Une fois ce système résolu, le champ électrique diffracté au point d'observation  $\mathbf{r}$  peut être calculé par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \alpha^3 \sum_{j=1}^m \left[ \frac{i\omega\varepsilon_- \mu_-}{\varepsilon(\mathbf{r})} \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\mu_j}{\mu_-}; V_j \right) \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right. \quad (2.44) \\ \left. + k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_g \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_-}; V_j \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_j) \right],$$

Rappelons que lorsque l'on est en train de calculer le champ diffracté en un point du demi-espace supérieur, on ne considère que les parties transmises des dyades  $\underline{\mathbf{G}}^{me}$  et  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$ . Par contre, pour calculer le champ diffracté en tout point du demi-espace inférieur, on doit utiliser les parties source et réfléchie de ces dyades.

### 2.11.1 Effet du couplage

Nous avons incorporé dans la formule asymptotique le modèle de Foldy-Lax pour prendre en compte l'effet du couplage entre les sphères et aussi avec l'interface. Nous avons déjà vu dans le cas d'une sphère proche ou loin de l'interface, que l'effet n'est considérable qu'autour de la sphère.

Maintenant, on considère deux sphères couplées de même rayon  $a = 0,05$  m et de même permittivité  $3\varepsilon_-$  placées sous l'interface parallèlement à l'axe  $x$ . Ces deux sphères sont séparées par une distance de 0,2 m entre leurs centres. Le milieu où se trouvent les deux sphères est diélectrique de permittivité  $4\varepsilon_0$ . Ces deux sphères sont éclairées par un dipôle électrique orienté verticalement situé à la position  $(0; 0; 0,5$  m) émettant à une fréquence de 300 MHz (voir fig. 2.19).

On trace la différence d'amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté sur le plan  $y = 0$  calculé par la formule asymptotique avec couplage (selon le modèle Foldy-Lax) et

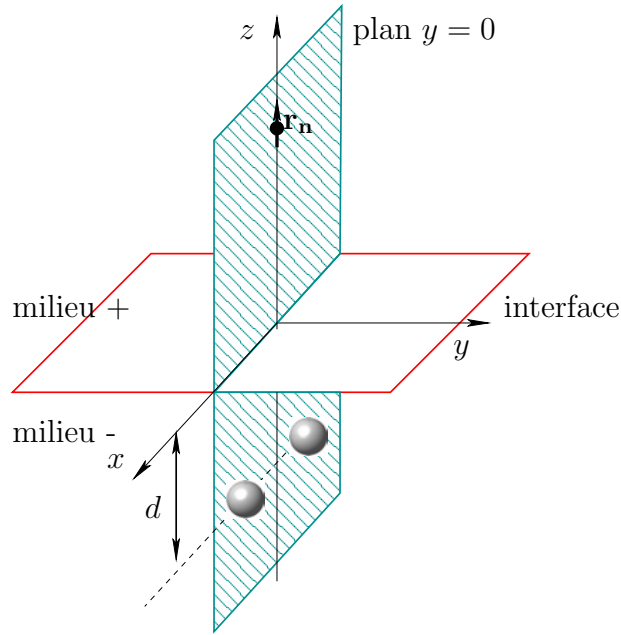


FIGURE 2.19 – Le plan d’observation  $y = 0$  pour un dipôle placé en  $\mathbf{r}_n = (0; 0; 0,5 \text{ m})$ .

sans couplage (tenseurs de sphères isolées en espace libre) pour différentes distances  $d = 0, 1; 0, 2$  et  $0, 5 \text{ m}$ .

Les simulations de la figure 2.20 nous permettent de tirer les mêmes conclusions que celles faites pour les simulations réalisées avec une seule sphère couplée à l’interface (Fig. 2.18), à savoir que le couplage n’a d’effet visible qu’au voisinage proche des inclusions, qu’il est d’autant plus fort que les inclusions sont proches de l’interface, et que cet effet ne peut être ressenti au niveau du demi-espace supérieur que si les inclusions sont très proches de l’interface, cela n’étant ressenti qu’au voisinage immédiat de l’interface. En effet, l’erreur relative du champ diffracté ne dépasse pas 2%.

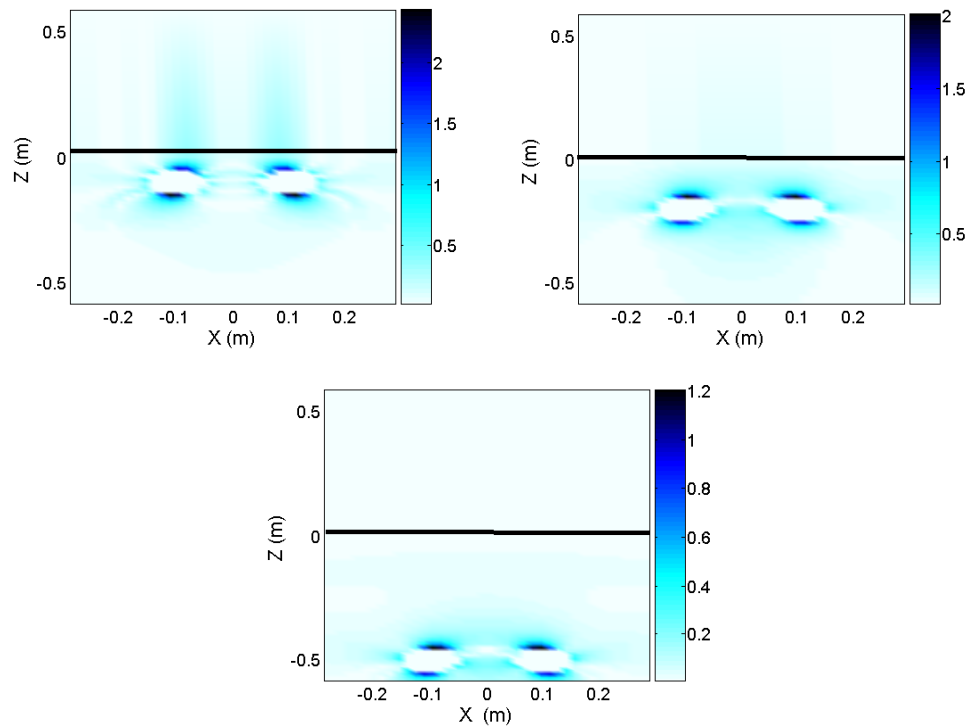


FIGURE 2.20 – La différence d’amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté sur le plan  $y = 0$  calculée par la formule asymptotique avec couplage (Foldy-Lax) et sans couplage pour différentes distances  $d$  :  $d = 0,5$  m (courbe en haut à gauche) ;  $d = 0,2$  m (courbe en haut à droite) ;  $d = 0,1$  m (courbe en bas), pour le cas de deux sphères de même rayon  $0,05$  m et de même permittivité  $3\varepsilon_-$ .



## Chapitre 3

# Comparaison à la méthode des dipôles couplés

### 3.1 Introduction

La formule asymptotique du champ diffracté en espace libre ou en demi-espace n'est a priori valide que pour des inclusions de tailles assez petites devant la longueur d'onde d'enfouissement. Dans ce chapitre, nous allons comparer le champ diffracté calculé par la formule asymptotique à celui calculé par la méthode des dipôles couplés (en anglais Coupled Dipole Method ou CDM) proposée par [16] pour différentes tailles de l'inclusion afin de déterminer un seuil de validité de la formule asymptotique.

### 3.2 Champ diffracté par la méthode des dipôles couplés

#### 3.2.1 Méthode des dipôles couplés en espace libre

Considérons un objet placé dans le vide de forme et de permittivité relative arbitraire. Cet objet est éclairé par une onde électromagnétique. Le principe de la CDM consiste à discrétiser l'objet en  $L$  petits éléments cubiques d'arête  $a$  (voir Fig. 3.1). Chaque élément doit être de dimension suffisamment petite devant la longueur d'onde dans l'objet ( $a \ll \lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ ). Chaque élément  $j$  est assimilé à un dipôle de polarisation  $\alpha_j$ , qui possède un moment dipolaire dont la valeur dépend de l'interaction avec tous les autres  $L - 1$  éléments cubiques et du champ incident. Le champ local  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  observé par le dipôle  $j$  à la position  $\mathbf{r}_j$  est fonction du champ incident et du champ diffracté





FIGURE 3.1 – Le principe de la méthode CDM : l'objet (à gauche) est discrétisé en  $L$  éléments cubiques. Ici  $N = 16$  c'est-à-dire que le diamètre est décomposé en 16 segments, ce qui donne un nombre total de  $L = 2426$  cubes élémentaires. La différence de volume est ici de 9%.

par tous les autres  $L - 1$  dipôles :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^L k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \alpha_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j), \quad (3.1)$$

où  $\alpha_j$  est la polarisabilité associée  $\alpha_j = 3a^3 \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_0}{\varepsilon_j + 2\varepsilon_0}$  et  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  est la dyade de Green donnée dans l'équation (1.2).

Le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  dans chaque dipôle  $j$  est obtenu en résolvant un système linéaire de dimension  $3L \times 3L$ .

Pour calculer le champ électromagnétique diffracté en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace, il suffit de sommer les champs rayonnés par tous les dipôles :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^L k^2 \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \alpha_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j), \quad (3.2)$$

Dans le cas de deux ou de plusieurs objets à discrétiser, le champ local à la position d'un dipôle dépend du rayonnement de tous les autres éléments du même objet et aussi du rayonnement des éléments des autres objets (voir Fig. 3.3). De telle sorte que le système d'équations devient un système de dimension 3 fois le nombre d'éléments de tous les objets. Le fait que les éléments de tous les objets influent sur le champ de chaque cube élémentaire illustre bien que cette méthode (CDM) prend en compte le couplage entre les objets.

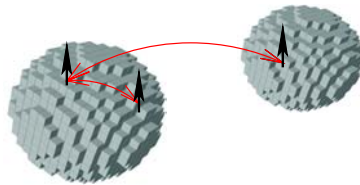


FIGURE 3.2 – Couplage entre deux sphères

### 3.2.2 Méthode des dipôles couplés en demi-espace

En présence d'une interface plane  $z = 0$ , l'objet est placé dans le milieu inférieur de permittivité  $\varepsilon_-$  et de perméabilité  $\mu_-$ . Cet objet est discrétisé en  $L$  petits cubes. Chacun de ces petits cubes doit être assez petit devant la longueur d'onde dans l'objet ( $a \ll \lambda_-/\sqrt{\varepsilon_r}$ ). Le champ local rayonné par l'élément  $i$  est donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^L k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \alpha_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j), \quad (3.3)$$

où  $\alpha_j$  est la polarisabilité associé ( $\alpha_j = 3a^3 \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_-}{\varepsilon_j + 2\varepsilon_-}$ ).  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  est la dyade de Green électrique-électrique pertinente au problème du demi-espace. Puisque tous les cubes sont dans le demi-espace inférieur, nous utilisons les parties source et réfléchie de  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$ . La partie réfléchie de  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  traduit donc la prise en compte du couplage avec l'interface (voir Fig. 3.3). C'est ainsi que la méthode CDM prend en compte le couplage entre l'interface et l'objet.

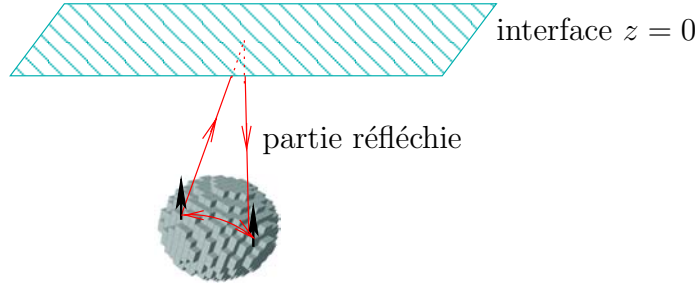


FIGURE 3.3 – Couplage avec l'interface.

De la même manière, le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  en chaque point occupé par un dipôle  $j$  est obtenu en résolvant le système linéaire. Le champ électrique diffracté observé en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace est obtenu en faisant la somme des champs rayonnés par tous les dipôles :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^L k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \alpha_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j), \quad (3.4)$$

L'expression de la dyade  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  est donnée dans le chapitre précédent. Elle dépend de la position du point d'observation et du point source. Dans le contexte de la formule (3.4) le point source  $\mathbf{r}_j$  est l'un des  $L$  cubes, il est donc situé dans le demi-espace inférieur. Si le point d'observation  $\mathbf{r}$  est situé dans le milieu inférieur où se trouvent les  $L$  dipôles, alors  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  fait appel aux deux termes : le terme de réflexion et le terme source. Si le point d'observation  $\mathbf{r}$  se trouve dans le milieu supérieur alors  $\underline{\mathbf{G}}^{ee}$  ne contient que le terme transmis.

Notons que, si l'on considère plusieurs objets dans le sous-espace inférieur, alors la méthode CDM prendra en compte le couplage entre les objets et aussi le couplage entre les objets et l'interface.

### 3.3 Résultats numériques en espace libre

Le champ électrique diffracté calculé par la formule asymptotique est comparé à celui calculé par la méthode CDM pour différents objets sphériques et ellipsoïdaux. Dans les simulations suivantes, les objets sont placés en espace libre  $(\varepsilon_0, \mu_0)$  et illuminés par un dipôle électrique orienté verticalement selon l'axe  $z$  d'intensité unitaire ( $1 \text{ Am}^2$ ). La fréquence de travail est de 500 MHz (donc  $\lambda = 0.6 \text{ m}$ ). Le dipôle est fixé à la position  $(-3; -3; 3)$ . Le champ diffracté est mesuré le long de deux lignes du réseau de  $21 \times 21$  dipôles orientés verticalement selon  $z$ . L'espacement entre les dipôles sur une rangée et les rangée de dipôles est de  $\lambda/2$ . Le réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , et est placé à une hauteur  $h = 3 \text{ m}$  par rapport au centre du repère (voir Fig. 3.4).

Nous traçons la partie réelle et imaginaire de la composante verticale  $E_z$  du champ électrique diffracté en fonction du numéro de récepteur. Les simulations CDM ont été communiquées par Patrick Chaumet de l'institut Fresnel<sup>1</sup>.

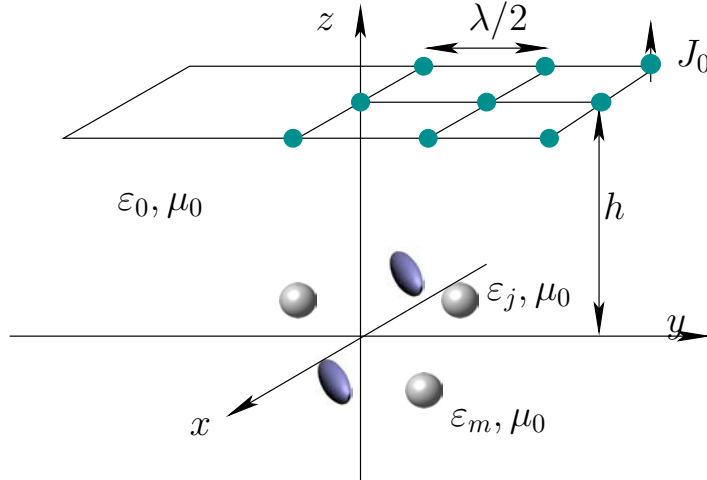


FIGURE 3.4 – Configuration en espace libre.

Nous considérons que la méthode CDM est la méthode exacte et nous définissons le pourcentage d'erreur entre les deux méthodes comme suit :

$$Erreur = \sqrt{\frac{\sum_{\text{dipôles récepteurs}} |E_{zCDM} - E_{zasympt}|^2}{\sum_{\text{dipôles récepteurs}} |E_{zCDM}|^2}} \times 100, \quad (3.5)$$

où  $E_{zCDM}$  est l'amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté calculé par la méthode CDM et  $E_{zasympt}$  est l'amplitude de la composante verticale du champ électrique diffracté calculé par la formule asymptotique.

1. Nous avons multiplié les données de P. C. Chaumet par  $i\omega\mu_0/4\pi k^2$  car ce dernier travaille en système CGS

### 3.3.1 Cas d'une sphère

Dans les simulations suivantes, on considère une sphère diélectrique centrée à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ , de rayons successifs  $0,03 \text{ m}$  ( $\lambda/20$  ou 5% de  $\lambda$ ),  $0,06 \text{ m}$  ( $\lambda/10$  ou 10% de  $\lambda$ ) et  $0,09 \text{ m}$  ( $3\lambda/20$  ou 15% de  $\lambda$ ) et de même permittivité relative  $\varepsilon_r = 5$ .

Sur la figure 3.5, la sphère de rayon  $0,03 \text{ m}$  a été divisée en 4224 éléments cubiques. A partir de cette figure nous observons que les résultats sont presque identiques. L'erreur sur la partie réelle est de 2,44%, sur la partie imaginaire elle est de 2,44%, et sur l'amplitude elle est de 1,96%.

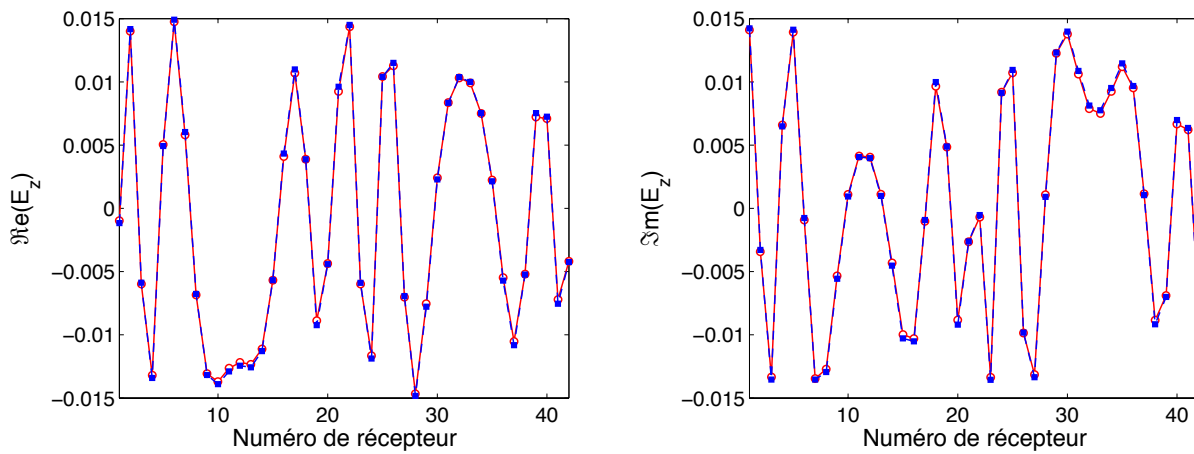


FIGURE 3.5 – La partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de la composante verticale du champ diffracté par une sphère de rayon  $a = 0,03 \text{ m}$  ( $\lambda/20$ ) illuminée par un émetteur électrique orienté verticalement, placé à la position  $(-3 \text{ m}; -3 \text{ m}; 3 \text{ m})$ , mesurée à la position de deux lignes du réseau et calculée par la formule asymptotique (courbe  $\circ$ ) et la méthode CDM (courbe cube).

Sur la figure 3.6, la sphère de rayon  $0,06 \text{ m}$  ( $\lambda/10$  ou 10% de  $\lambda$ ) a été divisée en 33552 cubes. Nous constatons que les résultats sont presque identiques mais que le pourcentage d'erreur a augmenté. L'erreur sur la partie réelle est de 11,37% et sur la partie imaginaire elle est de 10,71%. Par rapport à l'amplitude, l'erreur est de 3,64%.

A ce niveau, on peut dire que la formule est toujours valable pour un rayon de  $\lambda/10$ . On essaie encore d'augmenter un peu le rayon de la sphère pour fixer la limite de validité de la formule asymptotique. On prend cette fois une sphère de rayon  $0,09 \text{ m}$  ( $3\lambda/20$  ou 15% de  $\lambda$ ). Par la méthode CDM, cette sphère est discrétisée en 268096 éléments cubiques. La figure 3.7 nous montre que lorsque le rayon de la sphère est de 15% de la longueur d'onde, on distingue une grande différence entre les deux courbes, et le pourcentage d'erreur devient de 51,65% sur la partie réelle et de 42,98% sur la partie imaginaire.

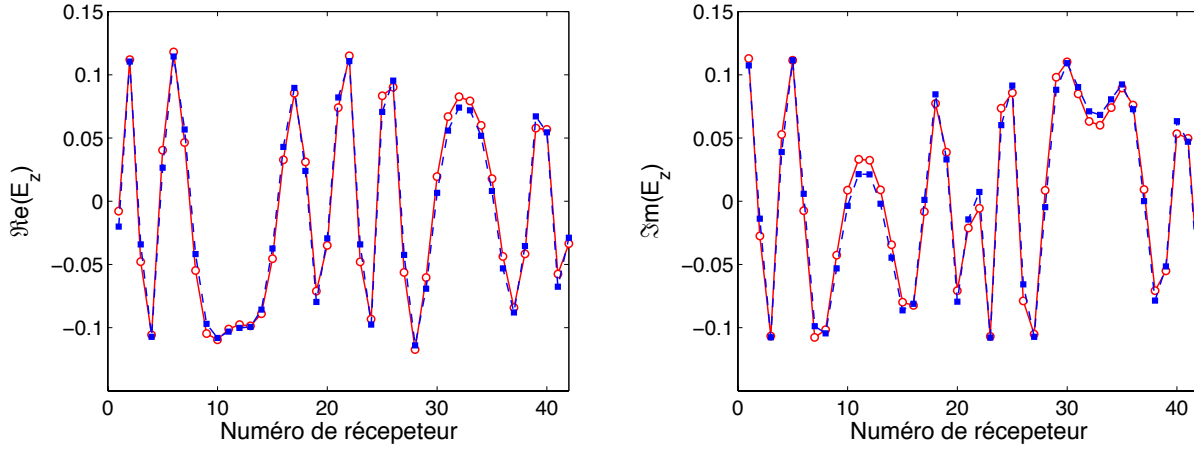
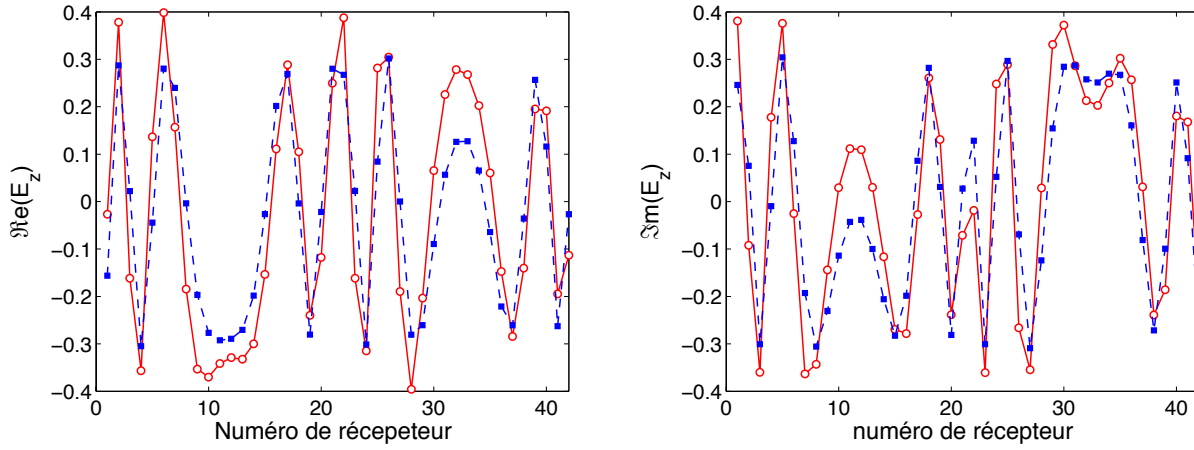
FIGURE 3.6 – Pour une sphère de rayon 0,06 m ( $\lambda/10$ ), comme en Fig. 3.5.

FIGURE 3.7 – Pour une sphère de rayon 0,09 m, comme en Fig. 3.5.

### 3.3.2 Cas d'un ellipsoïde

Nous avons comparé le champ diffracté par une sphère par les deux méthodes, maintenant nous introduisons un ellipsoïde diélectrique au lieu d'une sphère. Cet ellipsoïde est centré à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ , il est de semi-axes  $(0,06 \text{ m}; 0,03 \text{ m}; 0,02 \text{ m})$ , i.e., (10%, 5%, 3% de  $\lambda$ ) et de permittivité  $5\epsilon_0$ . Il est discrétisé en 688 éléments cubiques.

La figure 3.8 montre que nous trouvons deux courbes quasi identiques. En effet, le pourcentage d'erreur est de 4% sur la partie réelle, de 4% sur la partie imaginaire et de 3,09% sur l'amplitude.

On prend maintenant un ellipsoïde allongé de semi-axes  $(0,09 \text{ m}; 0,03 \text{ m}; 0,03 \text{ m})$ , i.e., (15%, 5%, 5% de  $\lambda$ ). Les courbes pour cet ellipsoïde sont affichées sur la figure 3.9. L'erreur sur la partie réelle est de 6,74%, sur la partie imaginaire elle est de 6,44%, et sur l'amplitude elle est de 3,74%.

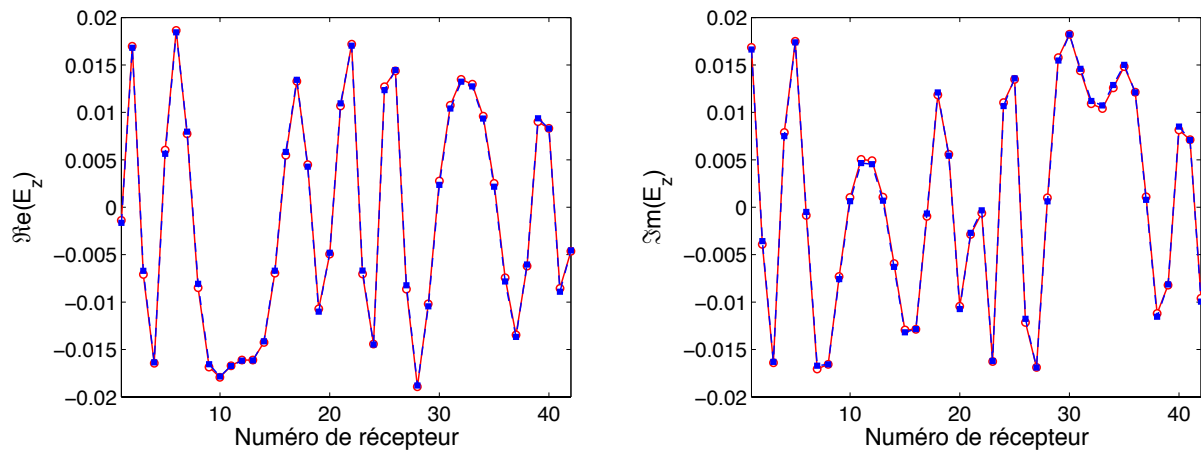


FIGURE 3.8 – La partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de la composante verticale du champ diffracté par un ellipsoïde de semi-axes (0,06 m ; 0,03 m ; 0,02 m ) i.e., (10%, 5%,3% de  $\lambda$ ) illuminé par un émetteur électrique orienté verticalement, placé à la position (-3 m ; -3 m ; 3 m), mesuré à la position de deux lignes du réseau calculée par la formule asymptotique (courbe  $\circ$ ) et la méthode CDM (courbe cube).

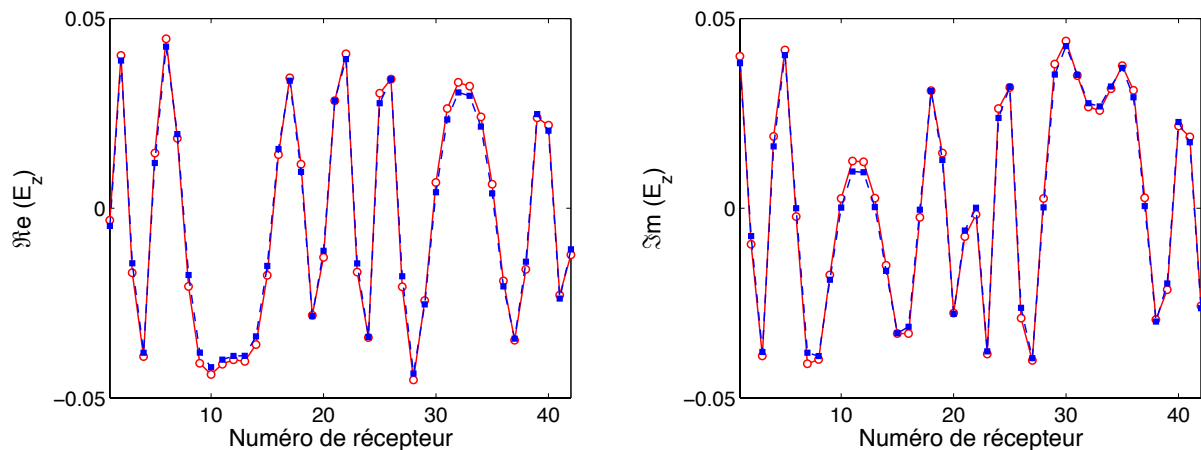


FIGURE 3.9 – Pour un ellipsoïde de semi-axes (0,09 m ; 0,03m ; 0,03 m), comme en Fig. 3.8.

Dans une autre simulation, on choisit un ellipsoïde de semi-axes (0,09 m ; 0,06 m ; 0,03 m), i.e., (15%, 10%,5% de  $\lambda$ ). Il s'agit des courbes de la figure 3.10. L'erreur sur la partie réelle est de 9,81%, sur la partie imaginaire elle est de 8,76% et sur l'amplitude elle est de 3,04%.

On compare, dans la simulation de la figure 3.11, les données du champ diffracté par un ellipsoïde de semi-axes (0,09 m ; 0,03 m ; 0,09 m), (i.e., 5%, 10%,15% de  $\lambda$ ). On obtient que le pourcentage d'erreur sur la partie réelle est de 37,30%, sur la partie imaginaire l'erreur est de 38,77% et sur l'amplitude elle est de 36,03%.

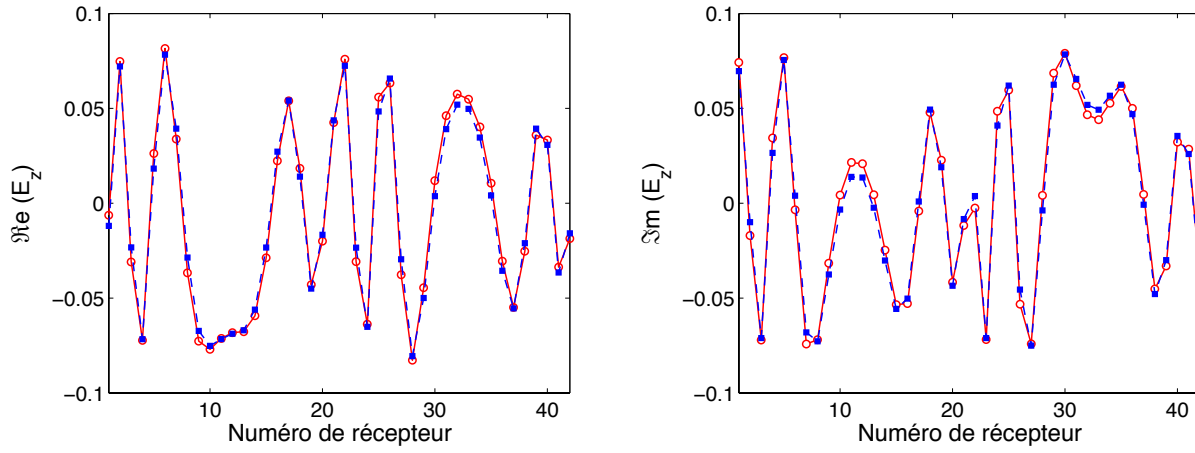


FIGURE 3.10 – Pour un ellipsoïde de semi-axes (0,09 m ; 0,06 m ; 0,03 m), comme en Fig. 3.8.

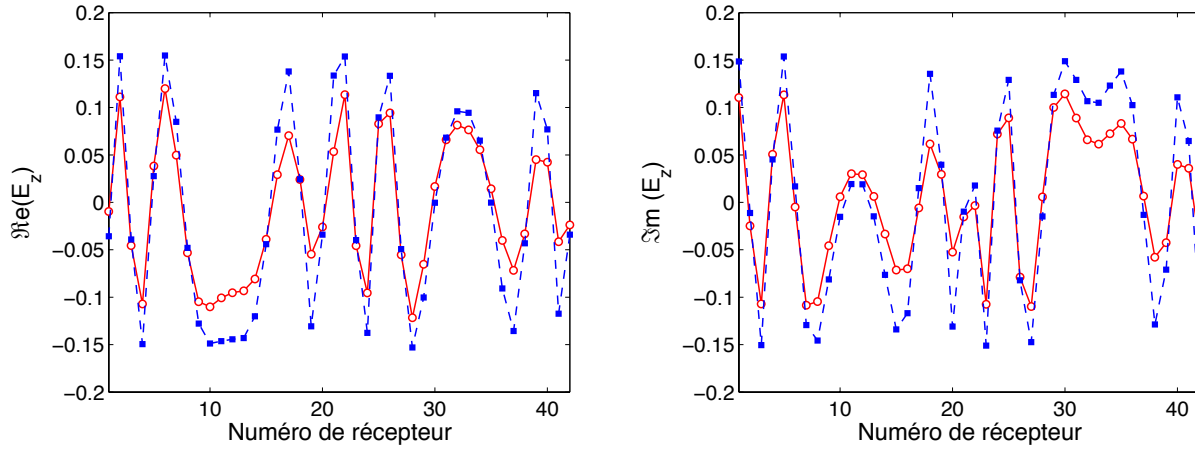


FIGURE 3.11 – Pour un ellipsoïde de semi-axes (0,09 m ; 0,03 m ; 0,09 m), comme en Fig. 3.8.

### 3.3.3 Cas de deux sphères

Rappelons que nous avons constaté, au premier chapitre, que, dans le cas des deux sphères, l'effet du couplage n'est visible qu'au voisinage proche des deux sphères. Dans cette simulation, on s'intéresse à deux sphères diélectriques de même rayon 0,03 m ( $\lambda/20$ ) et de différentes permittivités  $5\epsilon_0$  et  $3\epsilon_0$  centrées à la position  $(-0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$ . On obtient un pourcentage d'erreur de 3,82% sur la partie réelle, de 3,79% sur la partie imaginaire, et de 2,44% sur l'amplitude, voir Fig. 3.12. A ce niveau, ajoutons que l'allure des champs reste la même en toutes circonstances, même si certains écarts en pourcentage peuvent sembler ou sont importants, ainsi qu'il est facilement observé des figures fournies.

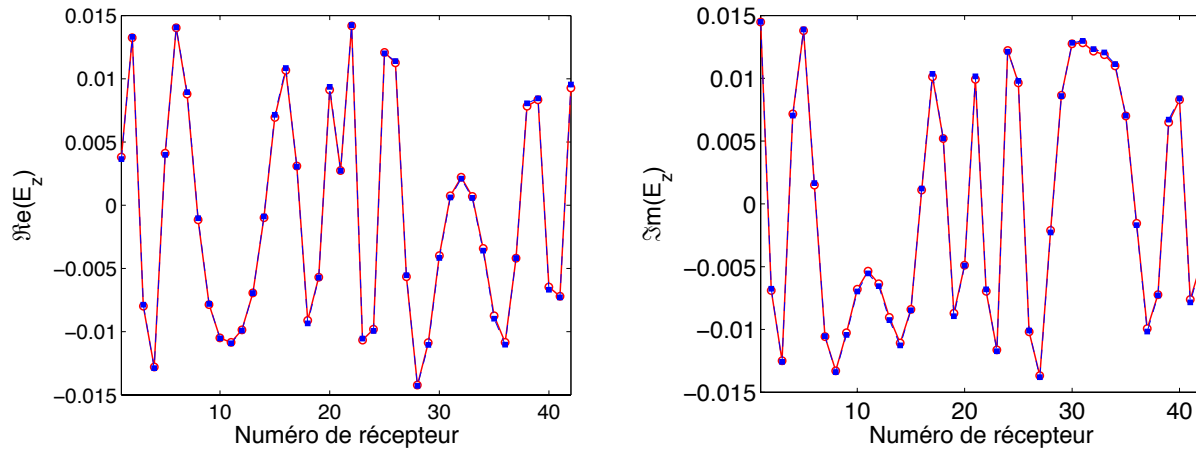


FIGURE 3.12 – La partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de la composante verticale du champ diffracté à la position de deux lignes du réseau calculée par la formule asymptotique obtenue dans le système de coordonnées bisphériques (courbe  $\circ$ ) et par la méthode CDM (courbe cube). Les deux sphères diélectriques sont de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\varepsilon_0, 3\varepsilon_0$ ).

### 3.4 Résultats numériques en demi-espace

Le champ diffracté calculé par la formule asymptotique est comparé à celui calculé par la méthode CDM. Les valeurs numériques du champ diffracté sont obtenues à chaque dipôle des lignes de mesure pour le cas d'une sphère ou de deux sphères illuminées par un dipôle électrique orienté verticalement, émettant à une fréquence de 300 MHz ( $\lambda_+ = 1$  m). Le champ diffracté est obtenu par les deux méthodes à la position de chaque dipôle parmi les 5 lignes d'un réseau de  $8 \times 8$  dipôles orientés verticalement selon  $z$ . Le réseau est placé dans le milieu supérieur de permittivité  $\varepsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ . L'espacement entre dipôles d'une rangée et entre deux rangées de dipôles est de  $\lambda_+/2$ . Le réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , et est placé à une hauteur  $h = 3$  m par rapport à l'interface (voir Fig. 3.13).

Nous traçons la partie réelle et imaginaire de la composante verticale du champ diffracté  $E_z$  en fonction du numéro de récepteur.

#### 3.4.1 Cas d'une sphère

Rappelons que dans le deuxième chapitre nous avons constaté que l'effet du couplage est ressenti fortement dans un voisinage autour de la sphère et il est de plus en plus fort quand la sphère se rapproche de l'interface.

On prend une sphère enfouie sous l'interface. Cette sphère est diélectrique de permittivité  $12\varepsilon_0$ . Le milieu d'enfouissement est de permittivité  $4\varepsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$  ( $\lambda_- = 0,5$  m). La sphère est de rayon  $\lambda_-/10$ , centrée à la position (0,15 m ; 0,23 m ;  $-d$  m). On fait varier la distance  $d$  qui



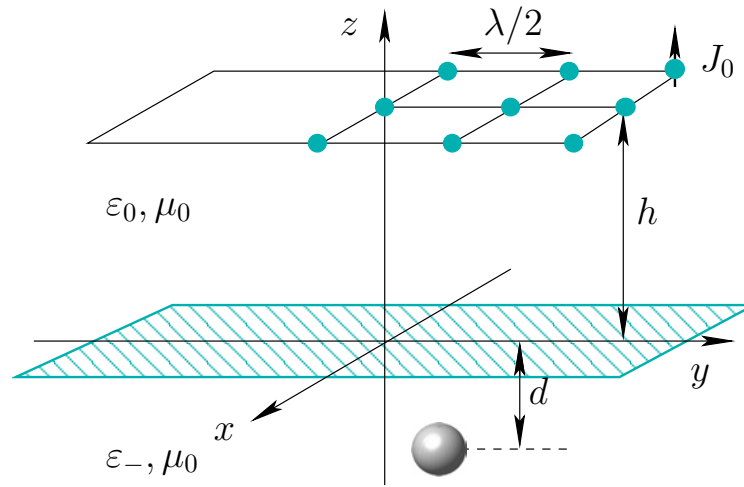


FIGURE 3.13 – Configuration en demi-espace.

représente la distance entre l'interface et le centre de la sphère.

Les résultats déjà vus en espace libre nous montrent que la formule asymptotique n'est convenable que lorsque le rayon de la sphère ne dépasse pas le dixième de  $\lambda$ . Un tel seuil limite est attendu en demi-espace. Lorsque la sphère est éloignée de l'interface de 1 m, la figure 3.14 nous montre qu'on obtient des courbes très proches avec un pourcentage d'erreur de 10,78% sur la partie réelle, de 7,97% sur la partie imaginaire, et de 4,86% sur l'amplitude.

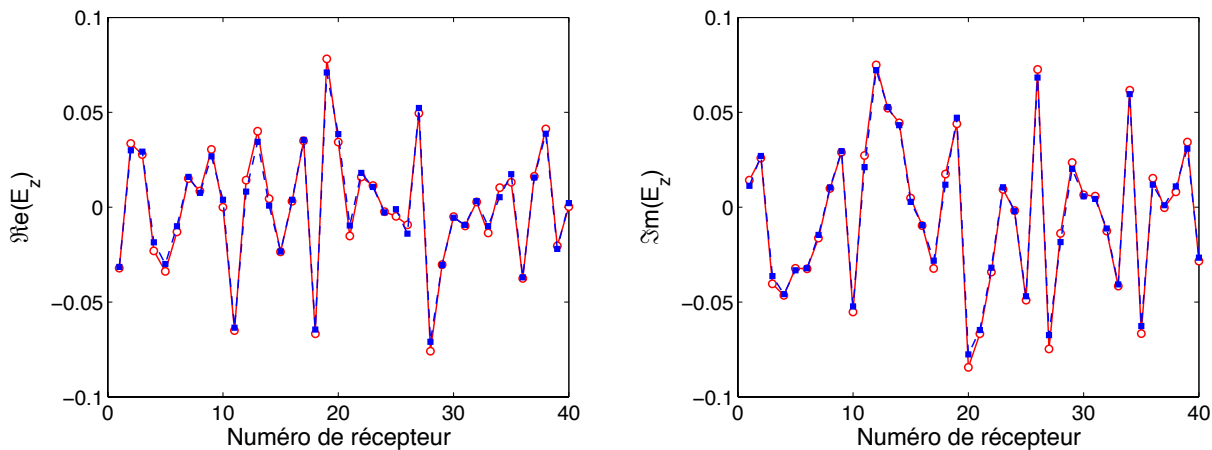


FIGURE 3.14 – La partie réelle (à gauche) et la partie imaginaire (à droite) de la composante verticale du champ diffracté à la position de 5 lignes du réseau calculé par la formule asymptotique obtenu dans le système de coordonnées bisphériques (courbe o) et la méthode CDM (courbe cube). La sphère de rayon  $a = 0,05$  m loin de l'interface de 1 m est éclairée par un dipôle électrique placé à la position  $(-1,75 \text{ m} ; -1.75 \text{ m} ; 0,5 \text{ m})$ .

De même, si l'on rapproche la sphère de l'interface de  $d = 0,2$  m et  $0,1$  m, les résultats sont identiques (voir Fig. 3.15 et Fig. 3.16). Pour  $d = 0,2$  m, l'erreur est de 7,14% sur la partie réelle, elle est de 10,07% sur la partie imaginaire et elle est de 4,42% sur l'amplitude. Pour  $d = 0,1$

m, l'erreur est de 11,33% sur la partie réelle, de 6,68% sur la partie imaginaire, et de 5,37% sur l'amplitude.

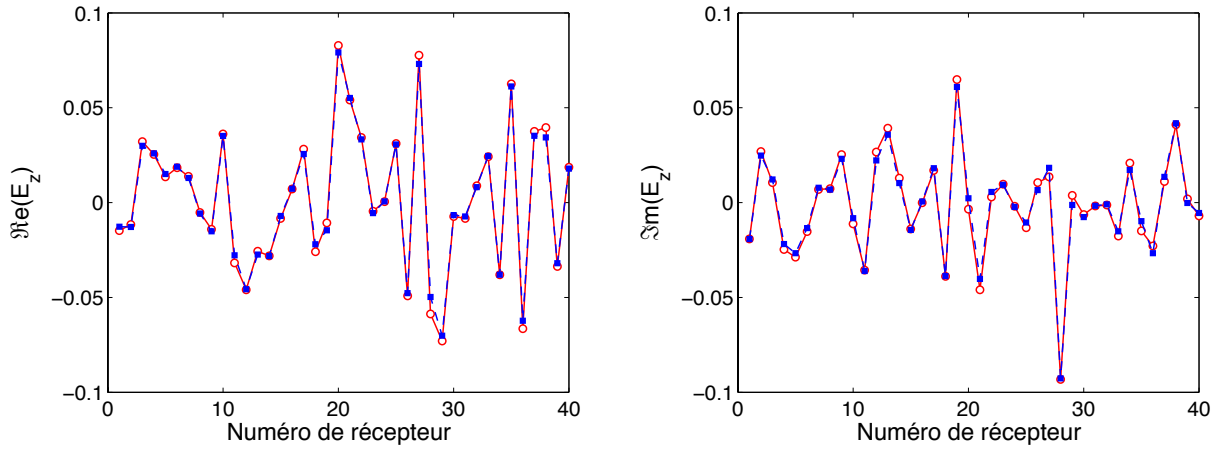


FIGURE 3.15 – Pour  $d = 0,2$  m, comme en Fig. 3.14.

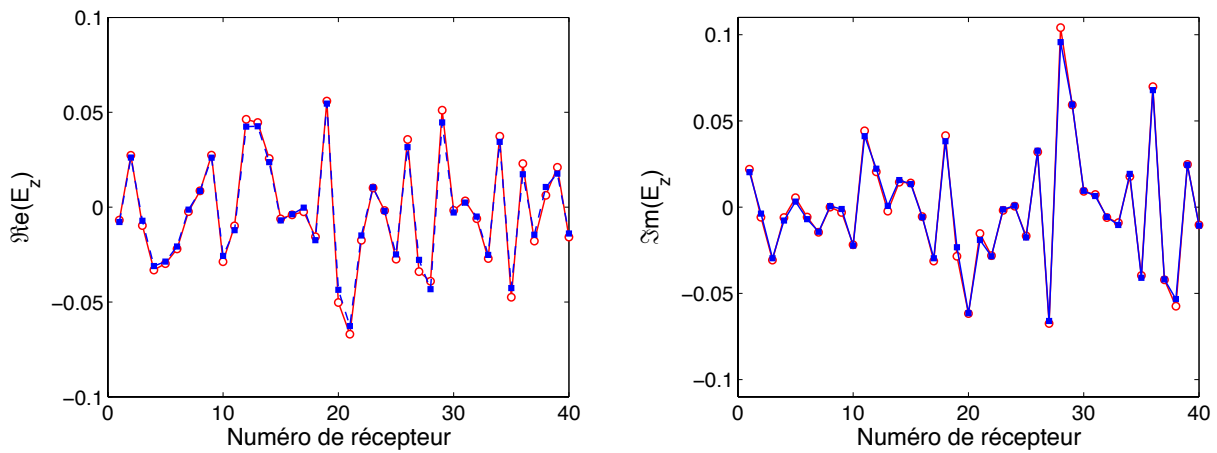


FIGURE 3.16 – Pour  $d = 0,1$  m, comme en Fig. 3.14.

### 3.5 Conclusion

Nous avons comparé les données du champ diffracté obtenues par ces deux méthodes (asymptotique et CDM) en espace libre ou en demi-espace. Nous avons illustré notamment qu'elles fournissent des champs diffractés identiques tant que la taille de l'objet demeure assez petite devant la longueur d'onde d'enfouissement. On peut fixer la limite de validité de la méthode asymptotique à un rayon de la sphère égal au dixième de la longueur d'onde d'enfouissement. Pour le cas de deux petites sphères couplées en espace libre, les données CDM confirment ce qui a été dit au premier chapitre, à savoir que l'effet du couplage n'est ressenti que si le point d'observation est loin des sphères (ici les dipôles récepteurs sont à une distance de  $5\lambda$  des sphères).

Concernant la limite de validité de la formule asymptotique pour un ellipsoïde, les simulations nous permettent de constater que la formule asymptotique donne un bon résultat tant que le volume de l'ellipsoïde est inférieur ou égal à celui d'une sphère de rayon  $\lambda/10$ .

Pour le cas d'une sphère proche de l'interface, les données CDM confirment ce qui a été dit au second chapitre, à savoir que l'effet du couplage n'est ressenti que si le point d'observation est loin de l'interface (ici les dipôles récepteurs sont à une distance de  $\lambda_-/2$  par rapport à l'interface).

# Chapitre 4

## Méthode d'imagerie

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère une méthode d'imagerie non itérative à une seule fréquence de type MUSIC (qui vaut MUltiple SIgnal Classification) pour détecter de petites inclusions. Cette méthode est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de réponse multistatique composée par des données de champ diffracté calculées par la méthode asymptotique ou par CDM. Grâce à cette méthode d'imagerie, nous pouvons détecter la position de chaque petite inclusion. Notre étude se fait par rapport à des inclusions sphériques ou ellipsoïdales, diélectriques ou/et magnétiques en espace libre et en demi-espace. Nous essayons d'étudier les caractéristiques de l'objet à détecter grâce à ses valeurs singulières et ses vecteurs singuliers. Nous exploitons aussi la méthode de rétropropagation des ondes qui vient directement du phénomène de retournement temporel. L'extension de la méthode MUSIC au cas d'objets étendus est quant à elle considérée en fin de chapitre.

### 4.2 Notion sur le retournement temporel

Le formalisme mathématique du phénomène de retournement temporel est basé sur l'Opérateur de Retournement Temporel (ORT) et sa décomposition (DORT) présentés par Fink et Prada [28].

La rétropropagation est un mécanisme qui permet de générer une onde qui va, théoriquement, converger sur l'objet diffractant même si le milieu traversé par l'onde n'est pas bien connu. Cependant, les expériences ont montré la limite de cette méthode surtout en terme de résolution de l'imagerie (voir plus loin dans ce chapitre).

[25, 31] ont proposé la méthode MUSIC qui suppose la connaissance du milieu traversé par

l'onde entre les émetteurs, les inclusions et les récepteurs. En effet, cette méthode se base sur le calcul de la matrice de réponse impulsionnelle inter-éléments des réseaux émetteurs/récepteurs ou matrice de réponse multi-statique du système qui se calcule à base des fonctions de Green des milieux traversés et de la formule de diffraction d'ondes par les inclusions.

Nous avons déjà développé aux précédents chapitres tout ce qu'il nous faut en terme des fonctions de Green (en espace libre ou en demi-espace) et des formules de calcul du champ diffracté pour de petits objets sphériques ou ellipsoïdaux (formule asymptotique et méthode CDM) pour pouvoir consacrer ce dernier chapitre à l'application de la méthode MUSIC pour la détection de petites inclusions ellipsoïdales en espace libre et en demi-espace.

### 4.3 Matrice de réponse multi-statique

Nous considérons un réseau de  $n_e$  dipôles émetteurs aux positions  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_{n_e}\}$ . Pour des raisons de simplification, nous supposons que tous ces émetteurs sont orientés selon une même et unique direction  $\vec{\beta}$ . Considérons un autre réseau de  $n_r$  dipôles récepteurs aux positions  $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_p, \dots, \mathbf{R}_{n_r}\}$ . Tous les dipôles récepteurs sont orientés selon une seule direction  $\vec{\gamma}$ . Nous considérons aussi  $m$  petites inclusions aux positions  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  de volumes  $\alpha V_1, \dots, \alpha V_m$  ( $\alpha$  étant l'ordre de grandeur de la taille des inclusions) ayant les caractéristiques  $(\varepsilon_1, \mu_1), \dots, (\varepsilon_m, \mu_m)$ . Nous allons calculer la matrice de réponse multi-statique du système formé par les dipôles émetteurs, les inclusions et les dipôles récepteurs (voir Fig. 4.1). Cette matrice, de taille  $n_r \times n_e$ , est constituée en déterminant le champ diffracté perçu par chaque récepteur venant de chaque émetteur. Cette matrice possède naturellement une écriture différente selon que le système soit en espace libre ou en demi-espace.

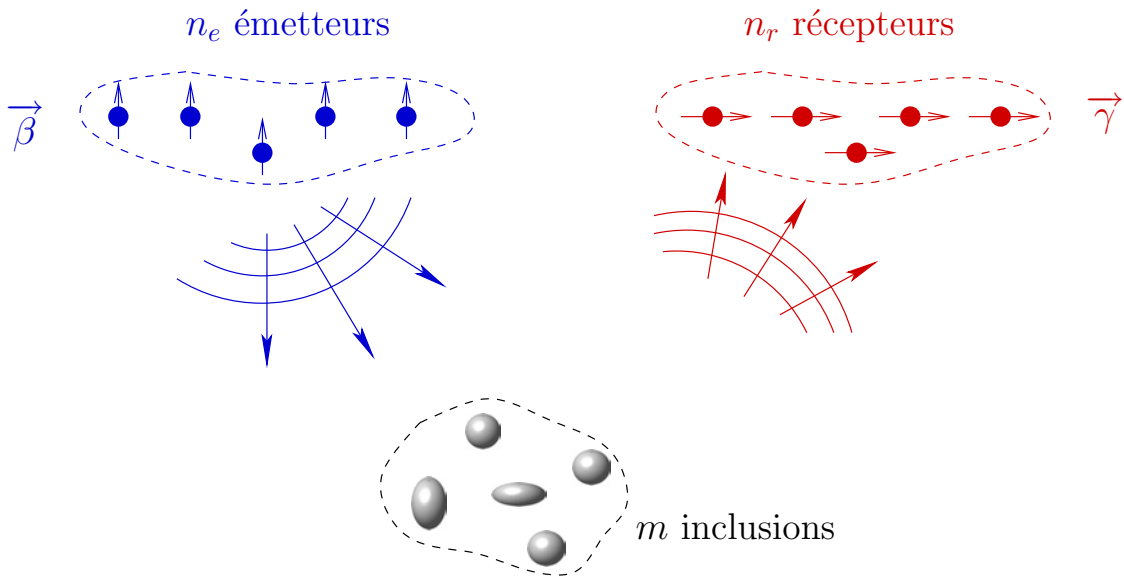


FIGURE 4.1 — Configuration en espace libre

### Matrice de réponse multi-statique en espace libre

Considérons le dipôle électrique émetteur  $n$  positionné en  $\mathbf{r}_n$ . Si ce dipôle est alimenté par un courant  $I_n$ , alors les champs incidents prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \cdot \vec{\beta} I_n \\ \mathbf{H}_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \cdot \vec{\beta} I_n.\end{aligned}$$

Ces champs incidents vont être diffractés par les  $m$  inclusions. Le champ diffracté mesuré par le récepteur  $p$  est donné par la formule asymptotique du champ électrique diffracté suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{R}_p) - \mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{R}_p) &= \sum_{j=1}^m \left[ \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{R}_p, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_j^\mu \mathbf{H}_0^{(n)}(\mathbf{x}_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{i\omega\mu_0} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{R}_p, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon \mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{x}_j) \right].\end{aligned}\quad (4.1)$$

Dans cette expression, nous avons négligé le terme d'ordre  $\alpha^4$ .  $\underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon, \underline{\mathbf{M}}_j^\mu$  sont les tenseurs de polarisation généralisés globaux qui sont définis par :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon &= i\omega\mu_0 \alpha^3 k^2 \underline{\mathbf{M}}_g\left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}; V_j\right), \\ \underline{\mathbf{M}}_j^\mu &= i\omega\mu_0 \alpha^3 \underline{\mathbf{M}}_g\left(\frac{\mu_j}{\mu_0}; V_j\right), \\ \underline{\mathbf{M}}_j^{\mu, \varepsilon} &= \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}_j^\mu, \underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Rappelons que  $\underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon$  et  $\underline{\mathbf{M}}_j^\mu$  sont des matrices de dimension  $3 \times 3$  et que  $\underline{\mathbf{M}}_j^{\mu, \varepsilon}$  est de dimension  $6 \times 6$ .

### Matrice de réponse multi-statique en demi-espace

On suppose que les réseaux de récepteurs et d'émetteurs se situent tous les deux au sein du milieu supérieur  $z > 0$  (ayant les caractéristiques  $\varepsilon_+$  et  $\mu_+$ ) et que toutes les inclusions sont placées dans le milieu inférieur (ayant les caractéristiques  $\varepsilon_-$  et  $\mu_-$ ). Donc les champs incidents rayonnés par le dipôle  $n$  au point  $\mathbf{r}$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu(\mathbf{r}_n) \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \cdot \vec{\beta} I_n, \\ \mathbf{H}_0^{(n)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu(\mathbf{r}_n)}{\mu(\mathbf{r})} \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \cdot \vec{\beta} I_n.\end{aligned}$$

Le champ électrique diffracté par les  $m$  inclusions dû au rayonnement de l'émetteur  $\mathbf{r}_n$ , observé par le récepteur  $p$ , est donné par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{R}_p) - \mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{R}_p) &= \sum_{j=1}^m \left[ \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r}_n) \mu_- k_-^2 \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{R}_p, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_j^\mu \cdot \mathbf{H}_0^{(n)}(\mathbf{x}_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_-}{i\omega} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{R}_p, \mathbf{x}_j) \cdot \underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon \cdot \mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{x}_j) \right],\end{aligned}\quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_j^\mu &= \alpha^3 \frac{i\omega\varepsilon_-}{\varepsilon(\mathbf{r})} \frac{\mu(\mathbf{r}_n)}{k_-^2 k^2(\mathbf{r}_n)} \underline{\mathbf{M}}_g(\mu_j/\mu_-; V_j), \\ \underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon &= \alpha^3 i\omega^3 \varepsilon_- \underline{\mathbf{M}}_g(\varepsilon_j/\varepsilon_-; V_j), \\ \underline{\mathbf{M}}_j^{\mu,\varepsilon} &= \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}_j^\mu, \underline{\mathbf{M}}_j^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Notons que l'on utilise la partie transmise de la dyade de Green uniquement puisque, pour le calcul de  $\mathbf{E}_0^{(n)}$  et  $\mathbf{H}_0^{(n)}$ , le dipôle émetteur et les inclusions sont dans deux demi-espaces séparés et, pour le calcul du champ diffracté, les inclusions et le dipôle récepteur sont aussi dans deux demi-espaces séparés.

### Tensions induites

En espace libre ou en demi-espace, le champ diffracté va générer une tension induite dans le récepteur  $p$  orienté selon la direction  $\vec{\gamma}$  (voir Fig. 4.2). L'expression de la tension induite dans le récepteur  $p$  (orienté selon la direction  $\vec{\gamma}$ ) due à l'excitation du dipôle émetteur  $n$  est la suivante :

$$V(\mathbf{R}_p, \mathbf{r}_n) = \vec{\gamma} \cdot \left( \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{R}_p) - \mathbf{E}_0^{(n)}(\mathbf{R}_p) \right).\tag{4.4}$$

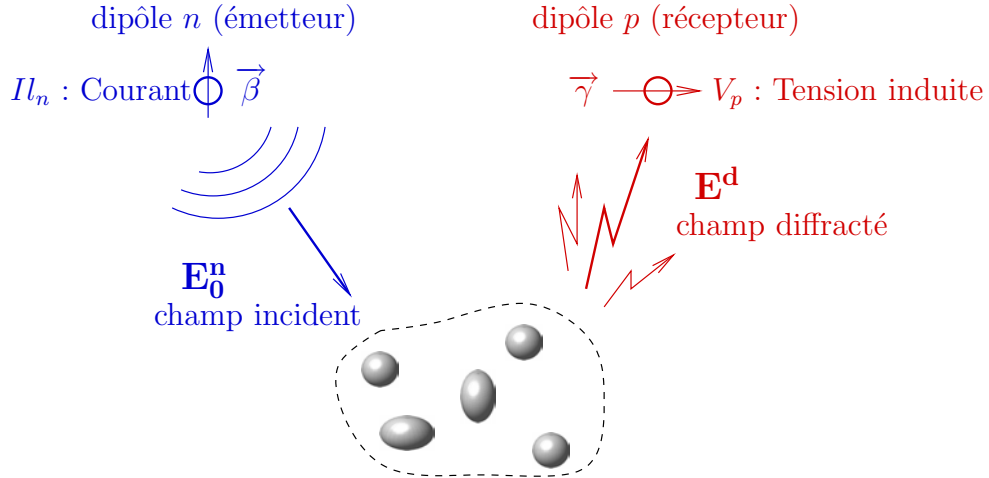


FIGURE 4.2 – Tension induite  $V_p$  sur le dipôle récepteur  $p$  due à l'excitation du dipôle émetteur  $n$  par un courant  $I_n$ .

Ceci nous permet d'obtenir la relation linéaire entre les  $n_e$  courants transmis et les  $n_r$  tensions obtenues pour l'ensemble du réseau qui s'écrit de la manière matricielle suivante :

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{I},\tag{4.5}$$

$$\text{où } \mathbf{V} = \left[ V(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_1), \dots, V(\mathbf{R}_p, \mathbf{r}_1), \dots, V(\mathbf{R}_{n_r}, \mathbf{r}_1) \right],$$

$$\text{où } \mathbf{I} = [(Il)_1, \dots, (Il)_n, \dots, (Il)_{n_e}],$$

$$\text{et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_1) & \dots & A(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_n) & \dots & A(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{n_e}) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ A(\mathbf{R}_p, \mathbf{r}_1) & \dots & A(\mathbf{R}_p, \mathbf{r}_n) & \dots & A(\mathbf{R}_p, \mathbf{r}_{n_e}) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(\mathbf{R}_{n_r}, \mathbf{r}_1) & \dots & A(\mathbf{R}_{n_r}, \mathbf{r}_n) & \dots & A(\mathbf{R}_{n_r}, \mathbf{r}_{n_e}) \end{bmatrix} \text{ de taille } n_r \times n_e.$$

La matrice  $A$  est dite la matrice de Réponse MultiStatique du système (dénotée MultiStatic Response matrix ou MSR dans les publications en anglais) formé par les dipôles et les inclusions. Notons que  $A^*A$  est appelé l'opérateur de retournement temporel (ORT) en notant  $A^* = \overline{A}^t$ .

La matrice  $A$  se décompose comme suit :

$$A = \sum_{j=1}^m \underline{\mathbf{G}}_r(\mathbf{x}_j) \underline{\mathbf{M}}_j^{\varepsilon, \mu} \underline{\mathbf{G}}_e^t(\mathbf{x}_j), \quad (4.6)$$

où  $\underline{\mathbf{M}}_j^{\varepsilon, \mu} = \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}_j^{\varepsilon}, \underline{\mathbf{M}}_j^{\mu})$  et  $\underline{\mathbf{G}}_p(\mathbf{x}) = [\underline{\mathbf{G}}_p^{\varepsilon}, \underline{\mathbf{G}}_p^{\mu}](\mathbf{x})$ , et où  $p = r, e$ ,  $\underline{\mathbf{G}}_p^{\varepsilon}(\mathbf{x})$  et  $\underline{\mathbf{G}}_p^{\mu}(\mathbf{x})$  sont des matrices de dimension  $n_p \times 3$  (qui sont constituées par les dyades de Green qui décrivent la propagation des ondes des  $n_e$  émetteurs aux points  $\mathbf{x}_j$  et des points  $\mathbf{x}_j$  aux  $n_r$  récepteurs) et  $\mathbf{x}$  est un point de l'espace différent des positions des émetteurs et des récepteurs  $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{n_r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_e}\}$ . Ces matrices prennent la forme suivante selon le type de configuration (milieu en espace libre ou en demi-espace) :

Dans le cas espace libre :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_r^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = (\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_1) \cdot \vec{\gamma}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_{n_r}) \cdot \vec{\gamma})^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_e^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = (\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) \cdot \vec{\beta}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{n_e}) \cdot \vec{\beta})^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_r^{\mu}(\mathbf{x}) = (\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_1) \cdot \vec{\gamma}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_{n_r}) \cdot \vec{\gamma})^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_e^{\mu}(\mathbf{x}) = (\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) \cdot \vec{\beta}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{n_e}) \cdot \vec{\beta})^t, \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans le cas demi-espace :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_r^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mu_+ [\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_1) \cdot \vec{\gamma}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_{n_r}) \cdot \vec{\gamma}]^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_e^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mu_+ [\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) \cdot \vec{\beta}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{n_e}) \cdot \vec{\beta}]^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_r^{\mu}(\mathbf{x}) = k_+^2 [\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_1) \cdot \vec{\gamma}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{R}_{n_r}) \cdot \vec{\gamma}]^t, \\ \underline{\mathbf{G}}_e^{\mu}(\mathbf{x}) = k_+^2 [\underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) \cdot \vec{\beta}, \dots, \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{n_e}) \cdot \vec{\beta}]^t, \end{cases} \quad (4.8)$$



Rappelons à nouveau que, dans la formule asymptotique, nous n'avons besoin d'utiliser que la partie transmise de la dyade de Green.

Notons que cette décomposition est valide lorsque l'inclusion  $j$  est magnétique et diélectrique  $\mu_j \neq \mu_0$  et  $\varepsilon_j \neq \varepsilon_0$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Dans le cas où l'inclusion  $j$  est seulement diélectrique ( $\mu_j = \mu_0$ ) alors  $\underline{\mathbf{G}}_p = \underline{\mathbf{G}}_p^\varepsilon$ . Dans le cas où l'inclusion  $j$  est magnétique ( $\varepsilon_j = \varepsilon_0$ ) alors  $\underline{\mathbf{G}}_p = \underline{\mathbf{G}}_p^\mu$ .

## 4.4 Méthode MUSIC

Il est connu que toute matrice  $A$  de dimension  $M \times N$  est décomposable selon la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (SVD). La matrice  $A = \underline{\mathbf{G}}_r \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{G}}_e$  s'écrit alors comme le produit de trois matrices  $A = U \Sigma V^*$  où  $U$  et  $V$  (de telle sorte que  $U^*U = \underline{\mathbf{I}}$  et  $V^*V = \underline{\mathbf{I}}$ ) sont des matrices orthonormées, respectivement de dimension  $M \times M$  et  $N \times N$  et  $\Sigma$  est une matrice diagonale contenant les éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  appelées valeurs singulières non nulles de  $A$  (et de  $A^*$ ), telles que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s \geq 0$  où  $r \leq \min(M, N)$ .  $r$  est le rang de la matrice  $A$ .  $r$  est égal au nombre de valeurs singulières non nulles de  $A$ . Les  $r$  premières colonnes respectivement de  $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  et de  $U = (u_1, u_2, \dots, u_M)$  sont dénommées vecteurs singuliers droit et gauche de  $A$  et forment  $U_s = (u_1, u_2, \dots, u_s)$  et  $V_s = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ , l'indice « s » désignant le sous-espace signal par opposition à l'indice « b » du sous-espace bruit. Enfin, puisque les valeurs singulières de  $A$  sont rangées en ordre décroissant, l'indice  $i$  correspondant est appelé numéro d'ordre de la valeur singulière.

Les projections orthonormales à droite et à gauche sur le sous-espace bruit sont données par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_d &= \underline{\mathbf{I}} - (U_s U_s^*), \\ \mathcal{P}_g &= \underline{\mathbf{I}} - (V_s V_s^*).\end{aligned}$$

Si  $M = N$  (c-à-d que le nombre d'émetteurs est égal au nombre de récepteurs), le point test de l'espace  $\mathbf{x}$  coïncide avec la position  $\mathbf{x}_j$  (la position de l'inclusion  $j$ ), si et seulement si  $\mathcal{P}_d(\underline{\mathbf{G}}_r \cdot a) = 0$ , pour  $a \in \mathbb{C}^p$  (où  $p = 3$  ou  $6$  selon les caractéristiques de l'inclusion) tel que  $\underline{\mathbf{G}}_r \cdot a \neq 0$  où  $\underline{\mathbf{G}}_r$  est défini dans (4.7) et (4.8) et  $\mathcal{P}_g(\underline{\mathbf{G}}_e \cdot a) = 0$ , pour  $a \in \mathbb{C}^p$  tel que  $\underline{\mathbf{G}}_e \cdot a \neq 0$ , où  $\underline{\mathbf{G}}_e$  est défini dans (4.7) et (4.8).

Si  $M < N$  (c-à-d que le nombre d'émetteurs est inférieur au nombre de récepteurs), le point test  $\mathbf{x}$  coïncide avec la position  $\mathbf{x}_j$ , si et seulement si  $\mathcal{P}_d(\underline{\mathbf{G}}_r \cdot a) = 0$ , pour  $a \in \mathbb{C}^p$  tel que  $\underline{\mathbf{G}}_r \cdot a \neq 0$ , où  $\underline{\mathbf{G}}_r$  est défini dans (4.7) et (4.8).

Si  $M > N$  (c-à-d que le nombre d'émetteurs est supérieur au nombre de récepteurs), le point test  $\mathbf{x}$  coïncide avec la position  $\mathbf{x}_j$ , si et seulement si  $\mathcal{P}_g(\underline{\mathbf{G}}_e \cdot a) = 0$ , pour  $a \in \mathbb{C}^p$  tel que  $\underline{\mathbf{G}}_e \cdot a \neq 0$ , où  $\underline{\mathbf{G}}_e$  est défini dans (4.7) et (4.8).

On peut définir la fonction d'estimation selon le nombre des émetteurs et des récepteurs :  
si le nombre d'émetteurs est égal au nombre de récepteurs alors

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathcal{P}_d(\mathbf{G}_r \cdot a)\|^2} + \frac{1}{\|\mathcal{P}_d(\mathbf{G}_e \cdot b)\|^2}, \quad (4.9)$$

si le nombre d'émetteurs est inférieur au nombre de récepteurs, alors

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathcal{P}_d(\mathbf{G}_r \cdot a)\|^2}, \quad (4.10)$$

et si le nombre d'émetteurs est supérieur au nombre de récepteurs, alors

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathcal{P}_g(\mathbf{G}_e \cdot b)\|^2}. \quad (4.11)$$

La fonction d'estimation devra donc atteindre un maximum (en théorie  $+\infty$ ) en chacun des points  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  centres des inclusions.

La méthode MUSIC consiste donc à considérer un cube de recherche maillé et à évaluer la fonction  $W(\mathbf{x})$  sur chaque point  $\mathbf{x}$  du maillage de ce cube. Les parties de ce cube où  $W(\mathbf{x})$  atteint un maximum sont alors assimilées à la zone de présence du centre d'une inclusion détectée.

## 4.5 Analyse des valeurs singulières et des vecteurs singuliers en espace libre

Supposons qu'un réseau d'émetteurs soit placé d'une manière horizontale dans le plan  $z = z_a$  et qu'il soit symétrique par rapport aux axes  $\xi$  et  $\eta$  (voir Fig. 4.65). Le réseau de récepteurs est placé dans le même plan que le réseau d'émetteurs  $z = z_a$ .

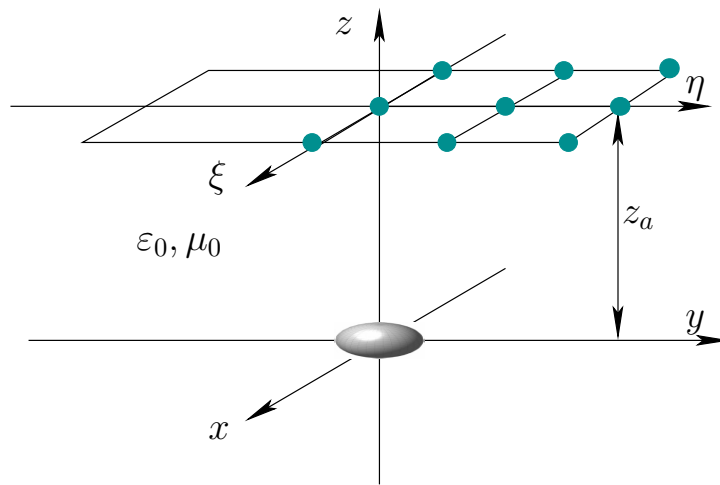


FIGURE 4.3 – Réseau linéaire d'émetteurs.

Considérons une inclusion ellipsoïdale ou sphérique diélectrique et magnétique centrée à l'origine en  $\mathbf{x}_\star = (0, 0, 0)$  avec les semi-axes de l'ellipsoïde coïncidant avec les axes du repère (donc aucune

rotation n'est à appliquer :  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ ). La matrice de réponse multistatistique est donnée par :

$$A = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star)^t,$$

où  $\underline{\mathbf{M}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}^\varepsilon, \underline{\mathbf{M}}^\mu)$ , comme cela a été déjà noté dans le premier chapitre,

$$\underline{\mathbf{M}}^\varepsilon = \mathbf{R} \begin{bmatrix} m_a^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & m_b^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & m_c^\varepsilon \end{bmatrix} \mathbf{R}^T, \quad \underline{\mathbf{M}}^\mu = \mathbf{R} \begin{bmatrix} m_a^\mu & 0 & 0 \\ 0 & m_b^\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_c^\mu \end{bmatrix} \mathbf{R}^T$$

$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) = [\underline{\mathbf{G}}^{\varepsilon, \mu}](\mathbf{x}_\star)$  et  $G(\mathbf{x}_\star)$  est donné par

$$G(\mathbf{x}_\star) = [\overline{\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star)}]^t \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) = \begin{bmatrix} G^\varepsilon & H \\ H^* & G^\mu \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

Considérons que les dipôles sont des dipôles croisés orientés selon les trois directions,  $\gamma \in \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ . Les produits inter-éléments  $G^\varepsilon$ ,  $G^\mu$  et  $H$  de  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star)$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} G^\varepsilon &= (\overline{\underline{\mathbf{G}}^\varepsilon})^t \underline{\mathbf{G}}^\varepsilon = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^N \overline{\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_n)} (\vec{\gamma}_l \vec{\gamma}_l^t) \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_n, \mathbf{x}_\star), \\ G^\mu &= (\overline{\underline{\mathbf{G}}^\mu})^t \underline{\mathbf{G}}^\mu = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^N -\overline{\nabla \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_n)} (\vec{\gamma}_l \vec{\gamma}_l^t) \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_n, \mathbf{x}_\star), \\ H &= (\overline{\underline{\mathbf{G}}^\mu})^T \underline{\mathbf{G}}_{r,z}^\varepsilon = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^N \overline{\nabla \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_n)} (\vec{\gamma}_l \vec{\gamma}_l^T) \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_n, \mathbf{x}_\star). \end{aligned}$$

Supposons que les dipôles rayonnent en champ lointain. Ici les inter-éléments prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G^\varepsilon &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_n^6} \{ [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x)] + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y)] + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z)] \}, \\ G^\mu &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_n^4} \{ [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x] + [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y] + [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z] \}, \\ H &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_n^5} \{ [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x] + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y] \\ &\quad + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z] \}. \end{aligned}$$

Si le nombre de dipôles devient grand et que l'espacement entre les dipôles devient petit, alors on peut remplacer le produit inter-éléments par des intégrales sur l'ouverture du réseau [10, 4]

$$\begin{aligned} G^\varepsilon &= \int_s \frac{1}{r_n^6} \left\{ [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x)]^2 + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y)]^2 + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z)]^2 \right\} d\xi d\eta, \\ G^\mu &= \int_s \frac{1}{r_n^4} \left\{ [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x]^2 + [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y]^2 + [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z]^2 \right\} d\xi d\eta, \\ H &= \int_s \frac{1}{r_n^5} \left\{ [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_x] + [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_y] + \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z)] \otimes [\mathbf{r}_n \times \hat{e}_z] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

où  $\mathbf{r}_n = (\zeta, \eta, -z_a)$  et  $r_n = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z_a^2}$ .

Les éléments  $G^\varepsilon$ ,  $G^\mu$  et  $H$  correspondent à la somme des trois matrices. Chacune correspond à une direction,  $\vec{\gamma} = \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ . On considère que le réseau de récepteurs est placé sur les axes  $\{\xi, \eta, z_a > 0\}$  et qu'il est symétrique par rapport aux axes  $\xi$  et  $\eta$ . Alors les expressions des éléments se simplifient et deviennent comme suit :

$$\begin{aligned}
 G^\varepsilon &= \int_S \frac{1}{r^6} \left\{ \begin{bmatrix} (\eta^2 + z_a^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 z_a^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^2 \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\xi^2 + z_a^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 z_a^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^2 z_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 z_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi^2 + \eta^2)^2 \end{bmatrix} \right\} d\xi d\eta, \\
 G^\mu &= \int_S \frac{1}{r^4} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} d\xi d\eta, \\
 H &= \int_S \frac{1}{r^5} \left\{ \begin{bmatrix} 0 - z_a(\eta^2 + z_a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_a(\xi^2 + z_a^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_a \xi^2 & 0 \\ z_a \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} d\xi d\eta.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

A partir de ces expressions on peut dire que, si les dipôles sont dirigés selon les trois directions  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  et  $\hat{e}_z$  et que l'inclusion est diélectrique et magnétique (ou PEC), alors le rang de la matrice  $G$  est la somme des rangs de  $G^\mu$  et  $G^\varepsilon$ . Le rang maximal de la matrice  $G$  est 6 ; il dépend de la direction des dipôles du réseau et des caractéristiques de l'inclusion. En effet dans (4.13), on a vu que  $G^\mu$  s'exprime généralement comme somme de trois matrices. Lorsqu'on ne considère que la polarisation verticale,  $G^\mu$  s'écrit alors uniquement avec une seule matrice : celle en  $\xi^2$  et  $\eta^2$  dont le rang est clairement égal à 2 et non à 3 (d'où le rang de  $G$  égal à 5 non à 6).

Il a été montré [4] que, pour une sphère ou un ellipsoïde dont le semi-axe principal est selon l'axe  $z$  centré à l'origine, les valeurs singulières de  $A$  prennent l'expression suivante :

$$\sigma_j = |m_j| G_{jj},$$

où  $m_j$  est l'élément diagonal du tenseur de polarisation généralisé (rappelons que les réseaux d'antennes émetteurs et récepteurs sont identiques) et les vecteurs singuliers sont les colonnes de la matrice  $U$  suivante :

$$U = \underline{\mathbf{G}} G^{-1/2}.$$

## 4.6 Comportement des valeurs singulières

On traite ici le cas d'une inclusion sphérique et diélectrique de rayon  $0,03 \text{ m} = \lambda/20$  centrée à l'origine. Cette inclusion est éclairée par un réseau d'émetteurs/récepteurs de  $21 \times 21$  dipôles polarisés verticalement selon l'axe  $z$ . Le réseau est symétrique par rapport l'axe  $z$ . Il est placé à une distance  $h = 3 \text{ m}$  par rapport à l'origine du repère. L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ .

**Effet de la permittivité :** Tout d'abord, on fait varier la permittivité de l'inclusion. La figure 4.4 nous montre que les trois valeurs singulières non nulles croissent en fonction de la permittivité.

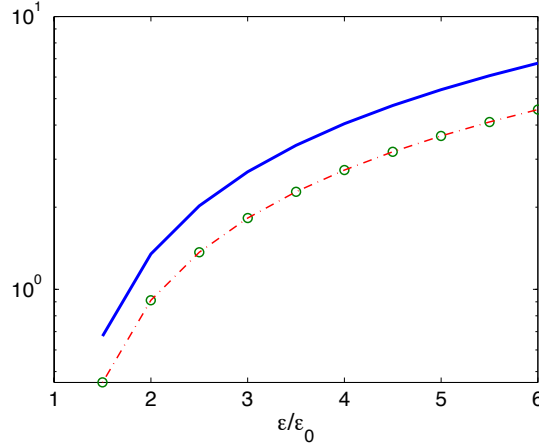


FIGURE 4.4 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction de la permittivité relative d'une sphère diélectrique centrée à l'origine illuminée par un réseau de dipôles verticaux, (courbe (—)) :  $\lambda_1$ , (courbe (○)) :  $\lambda_2$  et (courbe (—○)) :  $\lambda_3$ .

Précisons que  $\lambda_1$  représente la composante verticale (longitudinale) du moment dipolaire alors que  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  représentent les composantes transversales.

Notons que, comme prévu dans l'expression de  $G^\varepsilon$  dans l'équation (4.13), nous obtenons  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Ce comportement est dû à la polarisation verticale du réseau de dipôles, à la symétrie du réseau par rapport aux axes  $(\xi, \eta)$ , et au fait que la sphère est centrée par rapport au réseau.

**Effet du rayon :** Dans la simulation de la figure 4.5, on fixe la permittivité de la sphère diélectrique à  $5\varepsilon_0$  et on fait varier le rayon de la sphère. La simulation nous montre que les valeurs singulières augmentent en fonction du rayon. Dans le cas d'une sphère centrée, nous avons vu analytiquement que les valeurs singulières s'expriment en fonction du tenseur de polarisation et des inter-éléments  $G^\varepsilon$ . C'est ainsi que les valeurs singulières contiennent une information sur la taille de l'inclusion.

**Effet de l'enfouissement :** Dans la simulation de la figure 4.6, on fait varier la hauteur d'une sphère de rayon  $0.03 = \lambda/20$ , en la gardant centrée par rapport au réseau de  $21 \times 21$  dipôles ( $x_\star = 0, y_\star = 0, z_\star$  variable). Cette inclusion est diélectrique de permittivité  $5\varepsilon_0$ . On retrouve que  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont égaux et que les trois valeurs singulières sont décroissantes en fonction de la profondeur  $h$ . Lorsque  $h < 6,25\lambda$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont inférieures à  $\lambda_1$ . Lorsque  $h = 6,25\lambda$ , les trois valeurs singulières s'intersectent et lorsque  $h > 6,25\lambda$ , le comportement des valeurs singulières s'inverse :  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  deviennent les valeurs dominantes. On observe aussi que lorsque la distance entre la position de la sphère et le réseau augmente, les valeurs singulières diminuent. Lorsqu'on dépasse le point d'intersection, on observe que  $\lambda_1$  décroît plus rapidement que  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

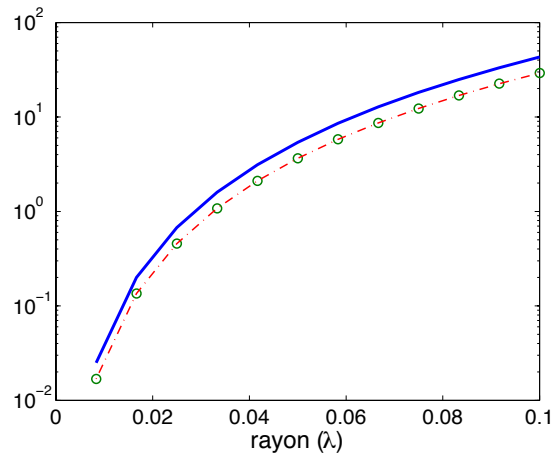


FIGURE 4.5 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction du rayon d’une sphère diélectrique centrée à l’origine illuminée par un réseau de dipôles verticaux, (courbe (—)) :  $\lambda_1$ , (courbe (o)) :  $\lambda_2$  et (courbe (— · —)) :  $\lambda_3$ .

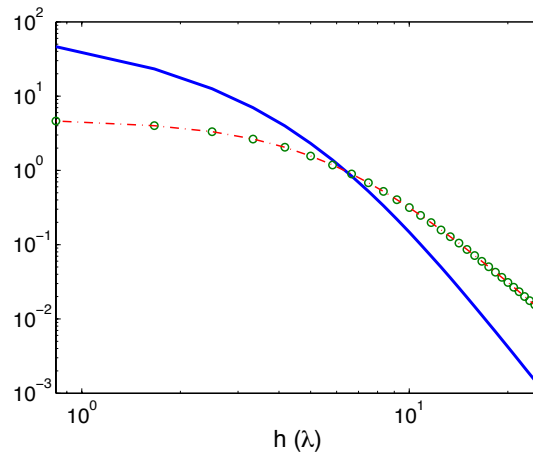


FIGURE 4.6 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction de la profondeur  $h$  pour une sphère diélectrique centrée à l’origine illuminée par un réseau de dipôles verticaux, (courbe (—)) :  $\lambda_1$ , (courbe (o)) :  $\lambda_2$  et (courbe (— · —)) :  $\lambda_3$ .

**Effet du déplacement latéral :** Jusqu’ici, nous avons toujours considéré que la sphère était centrée par rapport au réseau de dipôles (i.e.  $x_\star = 0$  et  $y_\star = 0$ ). Nous nous proposons, maintenant, d’étudier le cas où la sphère n’est plus centrée. Dans cette simulation, on suppose que l’inclusion est placée à une hauteur  $h = 3m$ . On fait déplacer l’inclusion transversalement selon l’axe  $y$  (en gardant  $h = 3m$  et  $x_\star = 0$ ) et on trace les trois valeurs singulières non nulles. A partir de la figure 4.7, nous remarquons tout d’abord que nous retrouvons que  $\lambda_2 = \lambda_3$  lorsque la sphère est centrée ( $y = 0$ ) puisque les courbes de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  s’intersectent en  $y = 0$ . Nous remarquons que  $\lambda_1$  décroît plus lentement que  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , ce qui fait que  $\lambda_1$  devient la valeur singulière la plus observable lorsque la sphère est loin de l’ouverture du réseau latéralement. Notons ici que, puisque la sphère n’est plus centrée par rapport au réseau, la valeur  $\lambda_1$  ne représente plus la composante verticale du moment dipolaire.

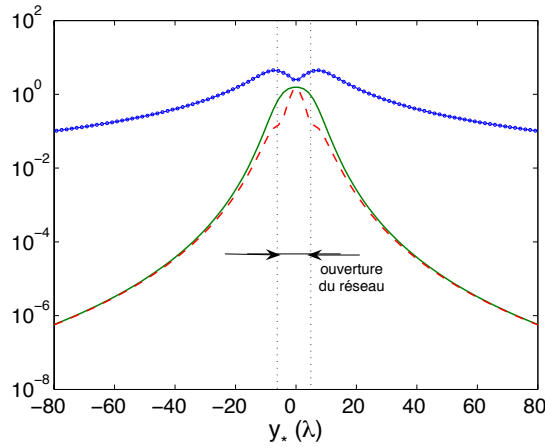


FIGURE 4.7 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction de différentes positions de l'inclusion sur l'axe  $y$  pour une sphère diélectrique illuminée par un réseau de dipôles verticaux, (courbe (  $\circ$  )) :  $\lambda_1$ , (courbe (—)) :  $\lambda_2$  et (courbe (---)) :  $\lambda_3$ .

**Cas de deux sphères :** Ici, on considère deux inclusions sphériques diélectriques aux positions  $(-0,1 \text{ m}; 0; 0)$  et  $(0,1 \text{ m}; 0; 0)$  de même rayon  $\lambda/20$  et de même permittivité  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$ . Les centres des deux sphères sont donc séparés de  $\lambda/3$ . Ces sphères sont illuminées par un réseau de  $13 \times 13$  dipôles verticaux. Ce réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , et il est placé à une hauteur  $h = 2\lambda$ . L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ . On trace la distribution des valeurs singulières non nulles de chaque sphère lorsqu'elle est considérée isolée, i.e., sans la présence de l'autre sphère. Puis, on trace la distribution des valeurs singulières non nulles du système en tenant compte de la présence des deux sphères.

La figure 4.8 nous montre que les deux distributions des valeurs singulières non nulles de chaque sphère isolée sont identiques car les deux sphères sont symétriques par rapport à l'axe  $z$  du réseau qui est par ailleurs polarisé verticalement. La distribution des valeurs singulières non nulles en présence des deux sphères nous donne bien six valeurs singulières. Mais il est intéressant de noter que ces valeurs ne représentent pas la somme des valeurs singulières associées à chaque sphère considérée comme isolée. D'ailleurs, les six valeurs singulières sont toutes différentes alors que l'on pourrait s'attendre à trouver ces valeurs égales par couple.

Si on compare maintenant les vecteurs singuliers, on se rend compte que les trois vecteurs singuliers de chaque sphère considérée isolée ont la même allure à une symétrie près (voir Fig. 4.9 et 4.10). Les trois vecteurs singuliers du système des deux sphères considérées ensemble apparaissant comme une combinaison des vecteurs singuliers de chaque inclusion séparée (voir Fig. 4.11). Il est intéressant de noter que ces trois premiers vecteurs singuliers ressemblent fortement aux trois vecteurs singuliers associés à une sphère centrée au milieu des deux sphères considérées ici. En effet, la figure 4.12 représente les trois vecteurs singuliers de cette sphère centrée. Notons qu'une analyse plus détaillée des vecteurs singuliers est présentée en annexe A

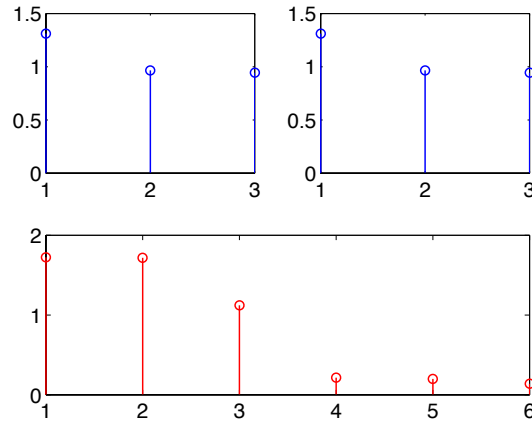


FIGURE 4.8 – (A gauche en haut) la distribution des valeurs singulières non nulles d’une sphère diélectrique à la position  $(-0,1 \text{ m} ; 0 ; 0)$ , (à droite en haut) la distribution des valeurs singulières non nulles d’une sphère diélectrique à la position  $(0,1 \text{ m} ; 0 ; 0)$ , (courbe en bas) la distribution des valeurs singulières non nulles en présence des deux sphères.

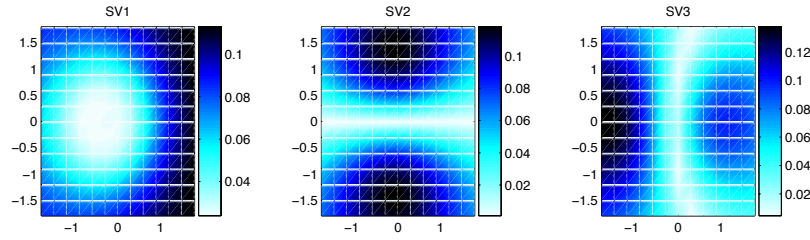


FIGURE 4.9 – Les trois vecteurs singuliers de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0,1 \text{ m} ; 0 ; 0)$ .

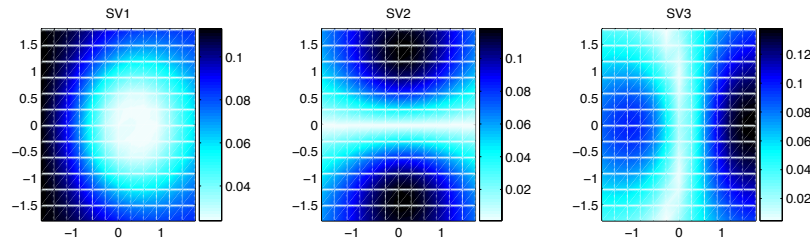


FIGURE 4.10 – Les trois vecteurs singuliers de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(0,1 \text{ m} ; 0 ; 0)$ .

## 4.7 Champ rétropropagé en espace libre

D’après le principe du retournement temporel, chaque vecteur propre de la matrice MSR représente un ensemble de courants complexes qui, une fois appliqué aux dipôles émetteurs, va produire un champ qui converge vers la position de l’inclusion [10, 38]. Cette inclusion va diffracter le champ reçu et va donc générer une tension induite sur les dipôles récepteurs. Ces tensions sont alors égales à  $V = TI = \sigma I^*$  donc des tensions induites égales aux conjuguées des courants d’excitation à un coefficient  $\sigma$  près ( $\sigma$  est la valeur singulière associée au vecteur singulier appliqué).



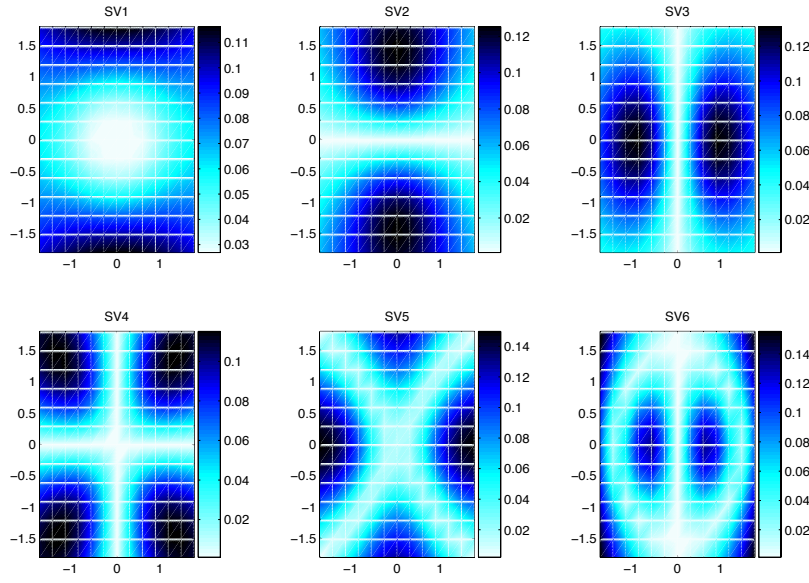


FIGURE 4.11 – Les six vecteurs singuliers de la matrice MSR en présence des deux sphères diélectriques aux positions  $(-0.1 \text{ m}; 0; 0)$  et  $(0,1 \text{ m}; 0; 0)$ .

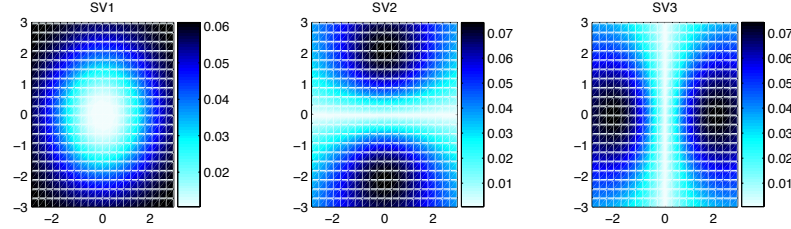


FIGURE 4.12 – Les trois vecteurs singuliers de la matrice MSR en présence d'une sphère diélectrique centrée à l'origine.

La convergence dépend de l'ouverture du réseau et aussi de l'espacement entre les dipôles (qui ne devra pas être inférieur à  $\lambda/2$ ). La résolution longitudinale est moins bonne que la résolution transversale de l'imagerie par champ rétropropagé, dans la mesure où l'on opère avec un seul réseau (émetteur/récepteur).

#### 4.7.1 Inclusion diélectrique

On considère ici une inclusion sphérique diélectrique de rayon  $\lambda/20$  et de permittivité relative 5. Cette inclusion est à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$  et est illuminée par un réseau horizontal de  $21 \times 21$  émetteurs/récepteurs polarisés selon l'axe  $z$ . L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ . Le réseau est placé à une hauteur  $h = 3 \text{ m}$  par rapport à l'origine du repère.

Sur la figure 4.13, on représente les valeurs singulières de la matrice MSR calculée par la formule asymptotique du champ diffracté. On distingue clairement trois valeurs singulières non nulles asso-

ciées à trois vecteurs singuliers. On applique ces trois vecteurs singuliers au réseau de dipôles puis on trace dans le plan  $x = -0,15$  m (plan de coupe longitudinal) et aussi dans le plan  $z = 0,175$  m (plan de coupe transversal) l'amplitude du champ électrique rayonné lorsqu'on applique ces vecteurs singuliers comme courants d'excitation du réseau émetteur.

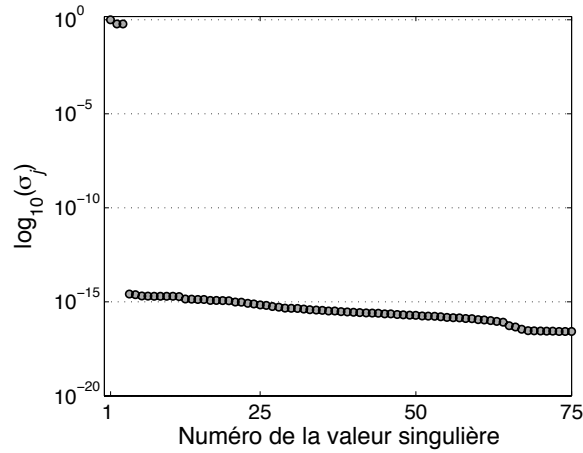


FIGURE 4.13 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculées par la formule asymptotique pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$  à la position  $(-0,15$  m ;  $0,15$  m ;  $0,175$  m).

Les figures 4.14 et 4.15 nous montrent que si l'on applique ces trois vecteurs singuliers, on obtient visiblement une onde qui converge vers la position de la sphère diffractante.

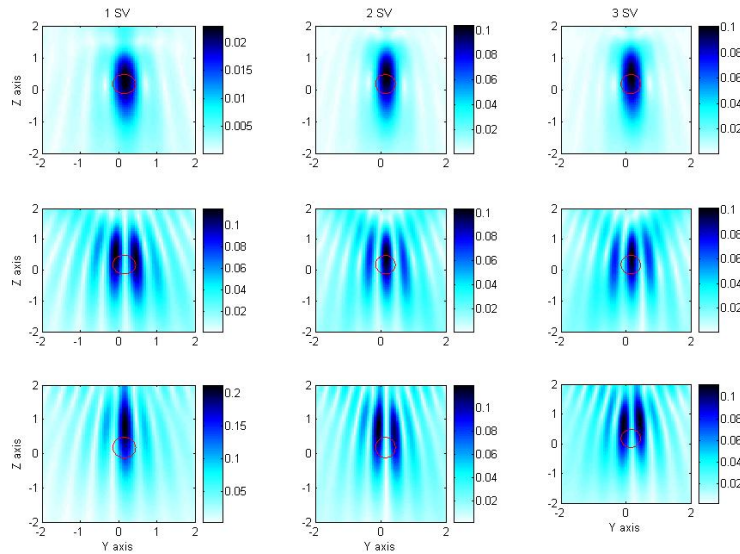


FIGURE 4.14 – Amplitude du champ rétropropagé par numéro de valeur singulière selon les trois composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  (de haut en bas) dans le plan longitudinal  $x = -0,15$  m, pour le cas d'une inclusion diélectrique de rayon  $\lambda/20$  centrée à la position  $(-0,15$  m ;  $0,15$  m ;  $0,175$  m). La matrice MSR utilisée a été calculée par la formule asymptotique.

On utilise la même configuration mais cette fois-ci les données de la matrice MSR sont calculées

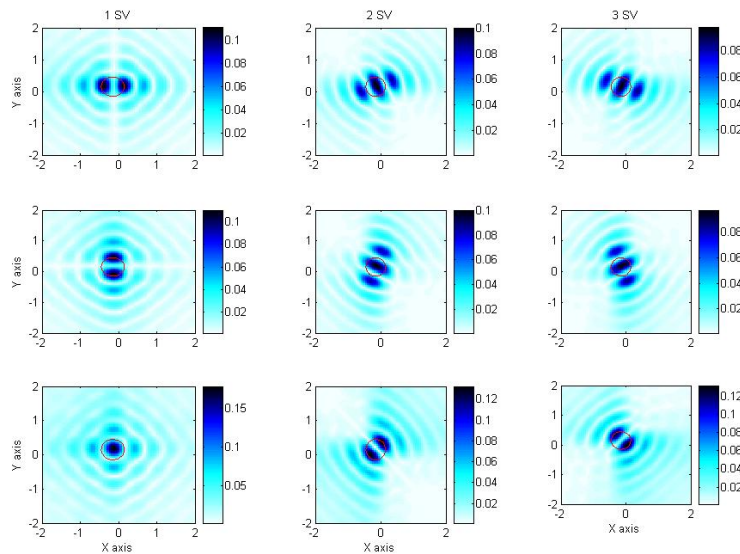


FIGURE 4.15 – Mêmes résultats que Fig. 4.16, dans le plan transversal  $z = 0, 175$  m.

par la méthode CDM.

Les figures 4.16 et 4.17 nous montrent que l'onde converge vers la position de l'inclusion si l'on applique les trois premiers vecteurs singuliers. (On verra plus loin dans ce chapitre que contrairement à la MSR calculée par la formule asymptotique, la MSR calculée en CDM donne plus que trois valeurs singulières non nulles.)

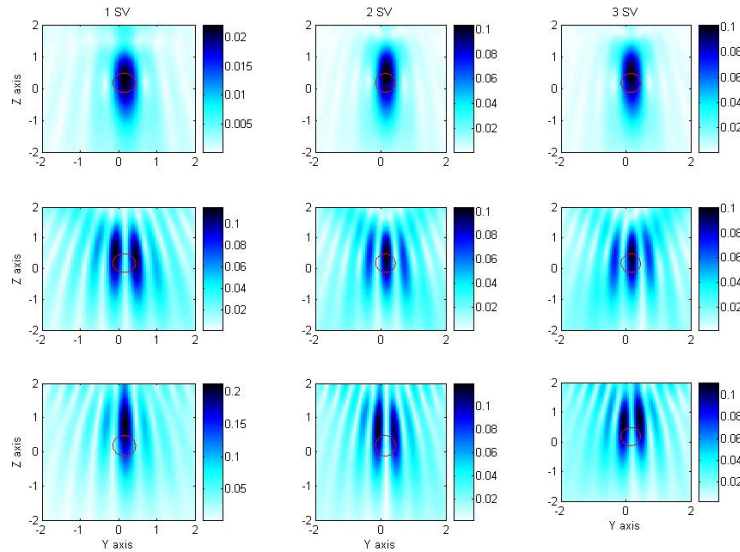


FIGURE 4.16 – Mêmes résultats que Fig. 4.14, la matrice MSR utilisée ayant été calculée par la méthode CDM.

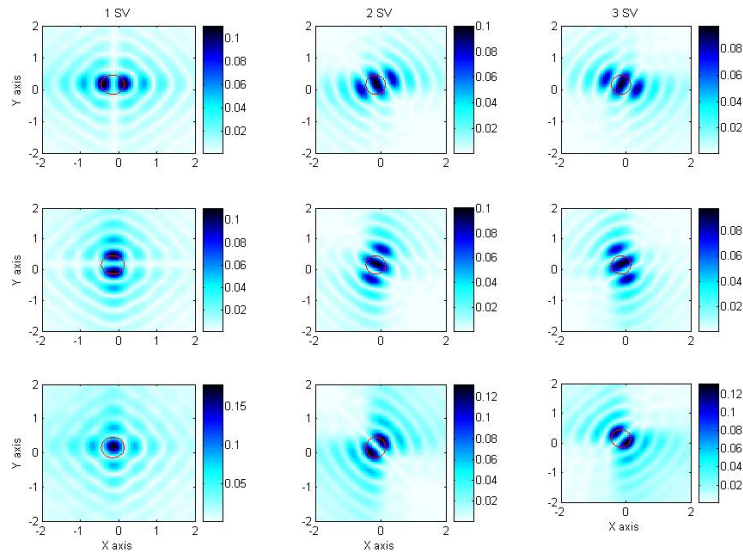


FIGURE 4.17 – Mêmes résultats que Fig. 4.16, dans le plan transversal  $z = 0,175$  m.

#### 4.7.2 Inclusion magnétique

Dans cette simulation, on considère la même configuration que la simulation précédente, en changeant seulement les caractéristiques de l'inclusion. On suppose qu'elle est magnétique de perméabilité  $5\mu_0$  et non diélectrique.

De la même manière, le spectre de la figure 4.18 nous montre qu'on distingue deux valeurs singulières non nulles. Le fait d'avoir deux valeurs singulières non nulles au lieu de trois a été déjà expliqué : il est dû à la polarisation verticale des dipôles (cf. section 4.5). Pour avoir l'image du champ rétropropagé, on applique les deux vecteurs singuliers qui correspondent à ces deux valeurs singulières non nulles au réseau de dipôles émetteurs ; on obtient aussi une onde qui converge vers l'inclusion (voir Fig. 4.19 et 4.22).

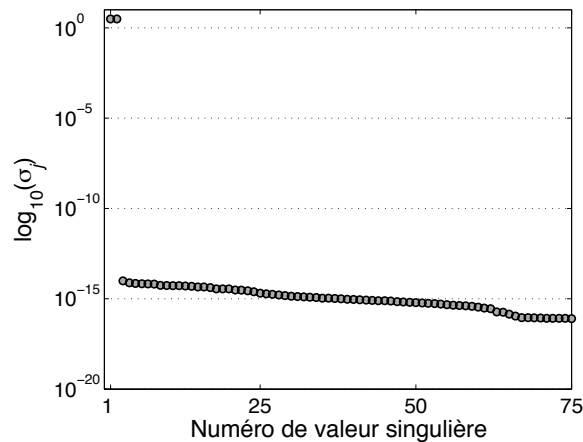


FIGURE 4.18 – La distribution des valeurs singulières de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculée par la formule asymptotique pour une sphère magnétique de perméabilité  $5\mu_0$ .

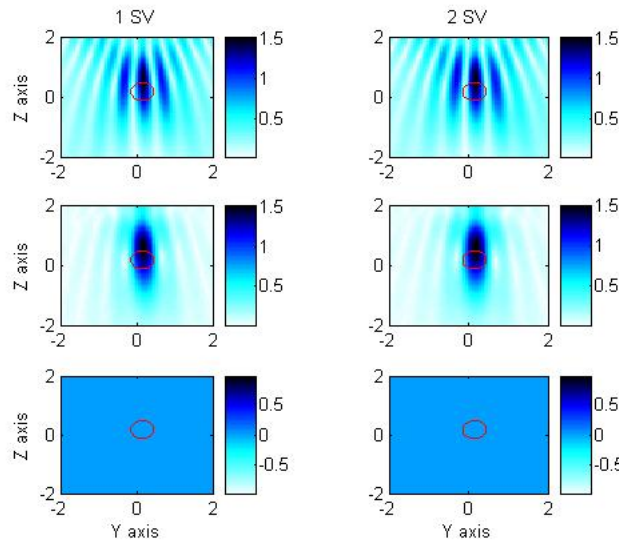


FIGURE 4.19 – Amplitude du champ rétropropagé par numéro de valeur singulière selon les trois composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  (de haut en bas) dans le plan longitudinal  $x = 0$ , pour le cas d'une inclusion magnétique de perméabilité  $5\mu_0$ . La matrice MSR a été calculée par la formule asymptotique.

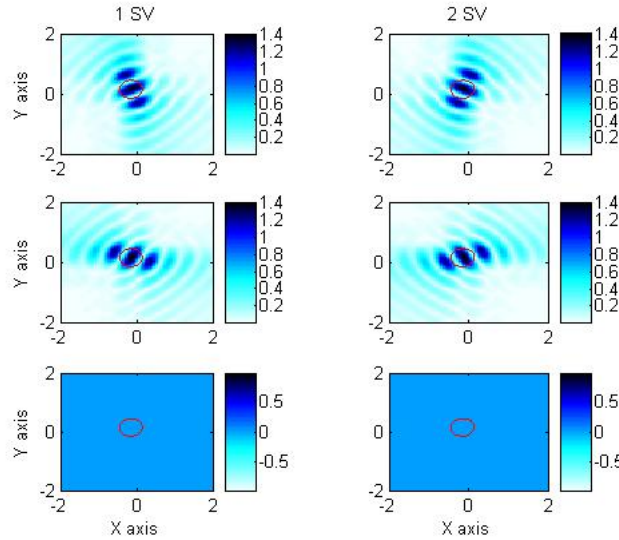


FIGURE 4.20 – Mêmes résultats que Fig. 4.19, dans le plan transversal  $z = 0,175$  m.

### 4.7.3 Inclusion diélectrique-magnétique

Dans cette simulation, on considère la même configuration que la simulation précédente, on change seulement les caractéristiques de l'inclusion, on suppose qu'elle est diélectrique et magnétique de permittivité  $5\epsilon_0$  et de perméabilité  $5\mu_0$ . A partir du spectre de la figure 4.21, on voit bien qu'on distingue nettement cinq valeurs singulières non nulles, et non six car le réseau est limité à une seule polarisation selon l'axe  $z$ .

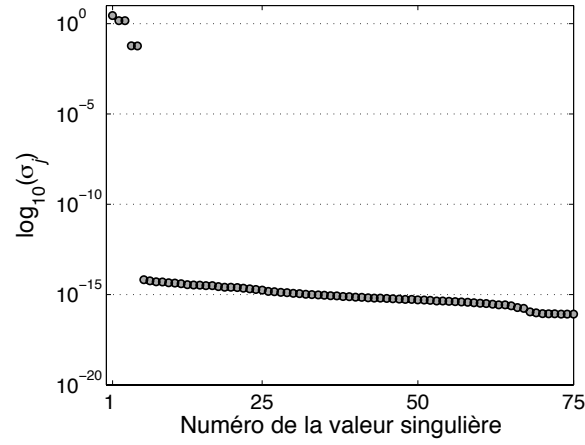


FIGURE 4.21 – La distribution des valeurs singulières de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculée par la formule asymptotique pour une sphère diélectrique-magnétique de permittivité  $5\epsilon_0$  et de perméabilité  $5\mu_0$ .

Si on applique les cinq vecteurs singuliers comme courants d'excitation des dipôles émetteurs, alors le champ va converger vers la position de la sphère (voir Fig. 4.22 et 4.23).

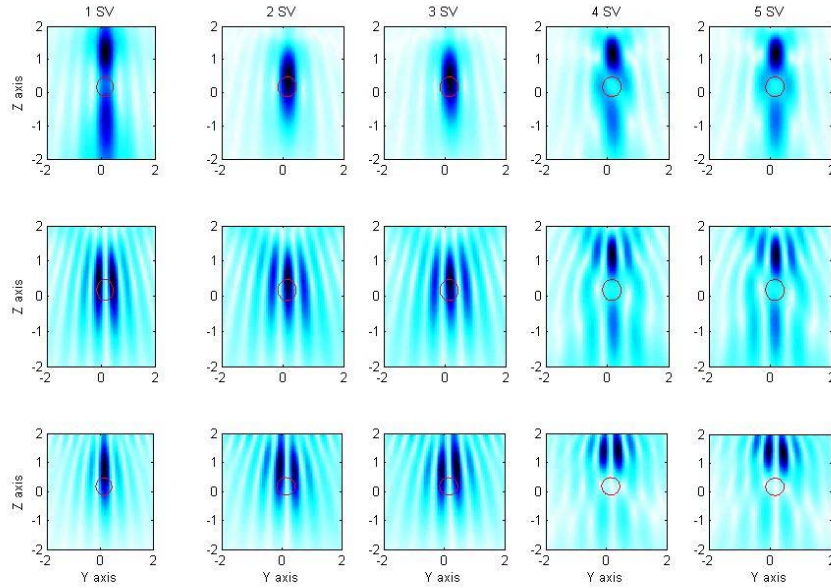


FIGURE 4.22 – Amplitude du champ rétropropagé par numéro de valeur singulière selon les trois composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  (de haut en bas) dans le plan longitudinal  $x = 0, 15$  m, pour le cas d'une inclusion diélectrique-magnétique de permittivité  $5\epsilon_0$  et de perméabilité  $5\mu_0$ .



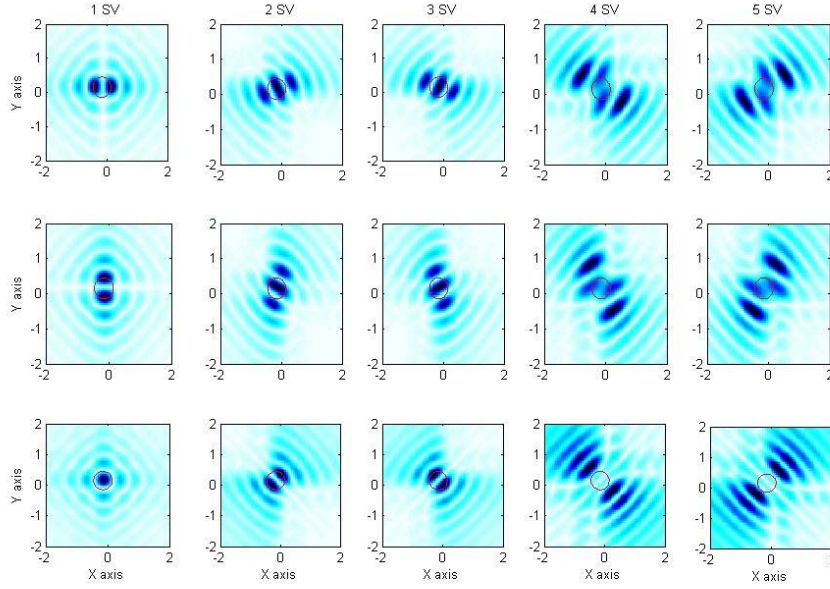


FIGURE 4.23 – Mêmes résultats que Fig. 4.22, dans le plan transversal  $z = 0, 175$  m.

## 4.8 Reconstruction en espace libre

Commençons par un petit rappel de la méthode MUSIC, mais cette fois l'analyse est simplifiée puisqu'on considère qu'il n'existe qu'une seule inclusion à détecter. Pour une inclusion diélectrique-magnétique la matrice MSR est définie comme suit

$$A = \underline{\mathbf{G}}^{\varepsilon, \mu} \underline{\mathbf{M}}^{\varepsilon, \mu} (\underline{\mathbf{G}}^{\varepsilon, \mu})^t.$$

Une fois que cette matrice est calculée, on la décompose en valeurs singulières. Pour le cas d'une inclusion diélectrique, le nombre de valeurs singulières non nulles est  $s = 3$ . Pour le cas d'une inclusion magnétique,  $s = 2$  si les dipôles émetteurs et récepteurs sont polarisés selon l'axe  $z$ . Dans le cas général, pour une inclusion magnétique-électrique,  $s = 6$ . Puis on effectue la détection de la position de l'inclusion par l'algorithme MUSIC. On considère un cube de recherche maillé dans la zone d'investigation comme montré sur la figure 4.24. Pour détecter la position de l'inclusion, on calcule, pour chaque point  $\mathbf{x}$  du maillage du cube de recherche, la dyade de Green liant  $\mathbf{x}$  à chaque dipôle émetteur. La fonction d'estimation  $W(\mathbf{x})$  est alors définie par :

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{i=s+1}^N |\langle u_i, (\underline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}) \rangle|^2} \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$  de dimension  $p$  où  $p = 3$  ou  $6$  selon les caractéristiques de l'inclusion tel que  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} \neq 0$ .

Précisons à ce niveau, et avant de passer en revue nos différentes simulations, que la fréquence de travail utilisée tout au long de ce chapitre est  $f = 500$  MHz et que la longueur d'onde en espace libre est alors  $\lambda = 0,6$  m. Tout le long de ce chapitre, l'analyse du spectre des matrices MSR, ainsi

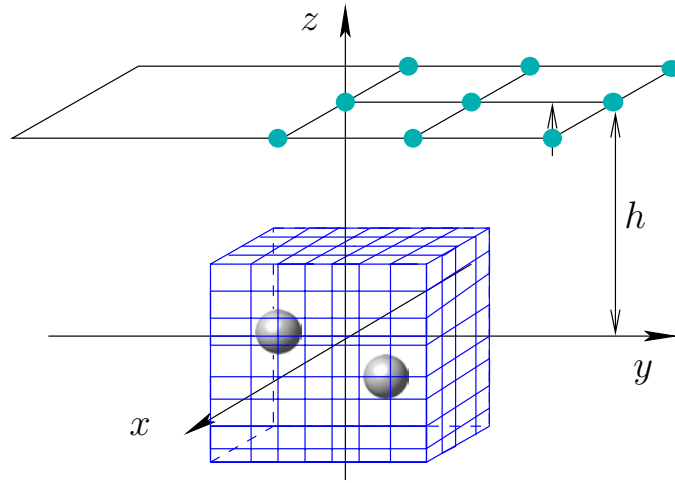


FIGURE 4.24 – Reconstruction par l'algorithme MUSIC.

que les courbes isosurfaces de reconstructions des inclusions ont été réalisés grâce à l'application MUSIC présentée en annexe B.

#### 4.8.1 Inclusion sphérique diélectrique

On considère une inclusion sphérique diélectrique de rayon  $0,03 \text{ m} = \lambda/20$  et de permittivité  $5\epsilon_0$  en espace libre. Cette inclusion est centrée à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ . On prend un cube de recherche de taille  $[2\lambda; 2\lambda; 2\lambda]$ . A chaque point de ce cube on calcule la dyade de Green observée par les  $N$  récepteurs. On prend un réseau de  $21 \times 21$  dipôles agissant à la fois comme émetteurs et récepteurs polarisés selon  $z$ . L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ . Le réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , et est placé à une hauteur  $h = 3m$  par rapport au centre du repère.

La figure 4.25 nous montre qu'on obtient trois valeurs singulières non nulles associées au sous-espace signal. Les autres valeurs singulières sont associées au sous-espace bruit. On remarque qu'on distingue bien la position de l'inclusion à l'aide de l'algorithme MUSIC qui correspond à une projection sur le sous-espace bruit.

#### Comparaison entre MUSIC et champ rétropropagé

Si on compare les deux images, cf. ci-après, une obtenue par l'algorithme MUSIC et l'autre par le champ rétropropagé, on constate une différence au niveau de la résolution. En effet, l'algorithme MUSIC nous donne une résolution meilleure que le champ rétropropagé.

L'inclusion à détecter est sphérique et diélectrique. La figure 4.26 nous donne une comparaison au niveau de la résolution transversale des deux méthodes : algorithme MUSIC et champ rétro-



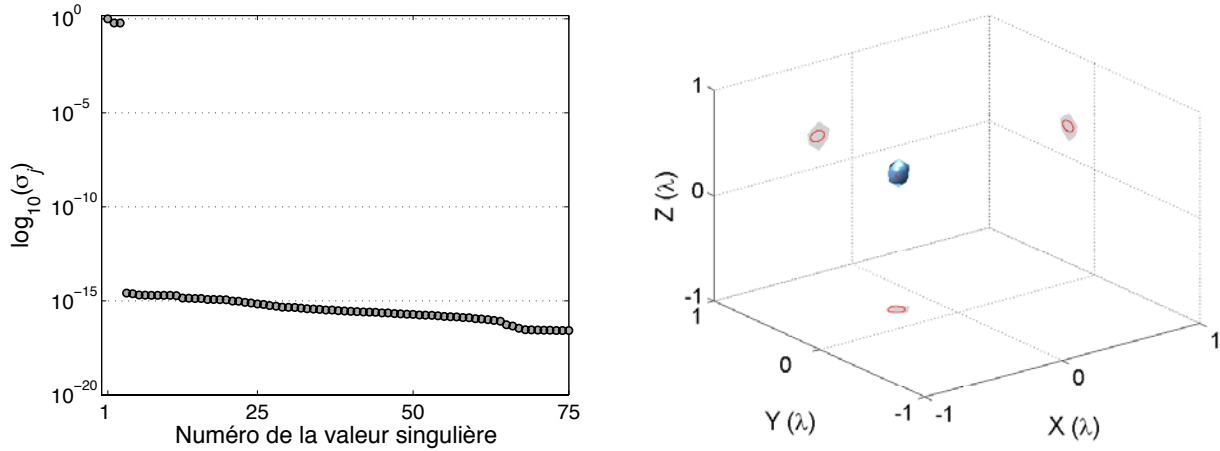


FIGURE 4.25 – (A droite) la distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculée par la formule asymptotique pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$ . (à gauche) Imagerie en 3D par l'algorithme MUSIC pour un isosurface de 20%.

pagé.

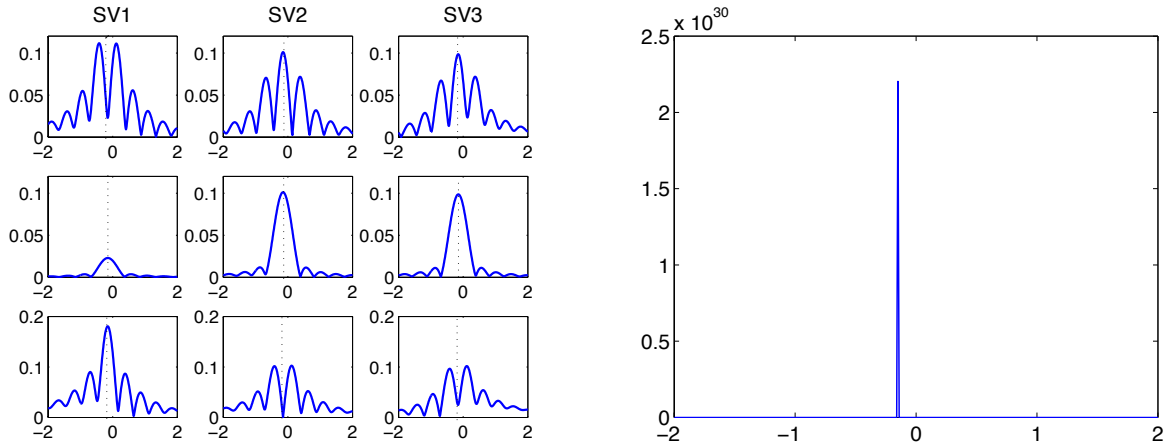


FIGURE 4.26 – (Courbe à gauche) amplitude du champ rétropropagé  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sur l'axe  $x$ , c-à-d sur un axe transversal, (courbe à droite) estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse le centre de la sphère.

La figure 4.27 compare la résolution longitudinale et on observe que la méthode MUSIC donne nettement une meilleure résolution notamment au niveau de la résolution transversale.

### Comparaison avec des données CDM

Dans les simulations suivantes, on considère une inclusion diélectrique sphérique de permittivité relative cinq. Cette inclusion est centrée à la position  $(-0,15 \text{ m} ; 0,15 \text{ m} ; 0,175 \text{ m})$  et est illuminée par un réseau horizontal d'émetteurs/récepteurs de  $21 \times 21$  dipôles verticaux polarisés selon l'axe  $z$ . L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$  comme usuel. Le réseau est placé à une hauteur  $h = 3$

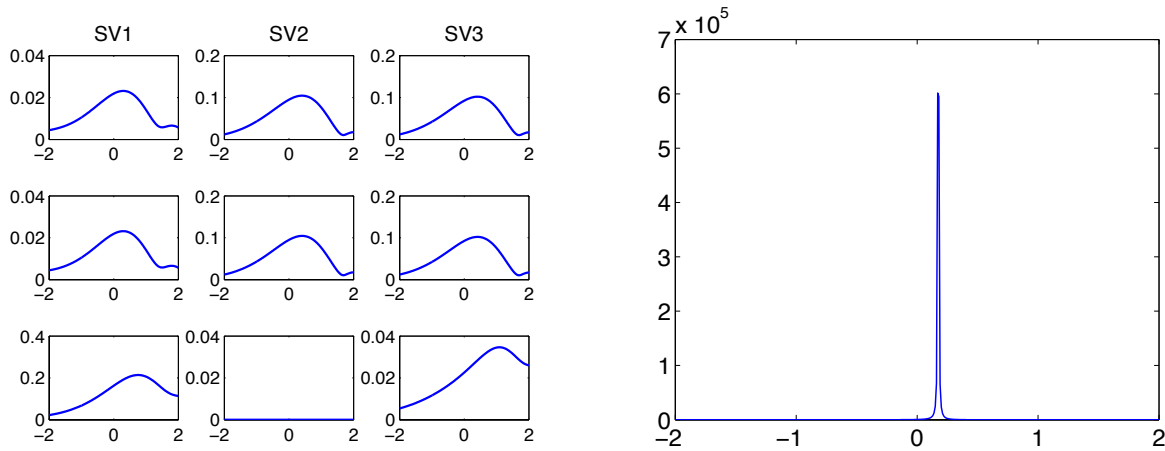


FIGURE 4.27 – (Courbe à gauche) amplitude du champ rétropropagé  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  dans l'axe  $z$  c-à-d sur un axe longitudinal, (courbe à droite) estimateur MUSIC le long de l'axe  $z$  qui traverse le centre de la sphère.

m par rapport à l'origine du repère.

**Remarque** : Nous avons un réseau de  $21 \times 21$  dipôles. Ce qui donne 441 dipôles. Ce nombre de dipôles est largement suffisant pour détecter quelques petites inclusions avec le formalisme asymptotique qui donne trois ou six valeurs singulières par inclusion. Par contre, la méthode CDM revient à discrétiser chaque petite inclusion en plusieurs milliers de dipôles. Nous voulons ici insister sur le fait que le nombre des dipôles CDM dépasse le nombre de dipôles du réseau émetteurs/récepteurs. Si on prend en compte qu'à chaque dipôle correspondent trois (voire six) valeurs singulières, alors le nombre de dipôles du réseau est insuffisant.

**Cas d'une sphère de rayon  $\lambda/20$  :** La matrice MSR est obtenue à partir du champ diffracté calculé par les deux méthodes : asymptotique et CDM. Nous avons déjà comparé la composante verticale du champ électrique diffracté calculé par la formule asymptotique à celle de celui calculé par la méthode CDM lorsque la sphère est de rayon  $\lambda/20$  et on a obtenu des champs diffractés quasi identiques (voir chapitre 3).

Maintenant, on va étudier si l'on obtient la même distribution des valeurs singulières lorsque la matrice MSR est formée par le champ diffracté calculé par chacune des deux méthodes. La figure 4.28 nous montre qu'à partir des données calculées par la formule asymptotique, on obtient une distribution discontinue : en effet, on distingue nettement trois valeurs singulières non nulles (le sous-espace signal), les autres valeurs singulières étant associées au sous-espace bruit. On peut expliquer cette discontinuité par le fait que la formule asymptotique assimile la sphère à un dipôle rayonnant (ce sont les moments dipolaires induits qui pilotent le rayonnement). Les trois vecteurs singuliers associés à ces trois valeurs singulières contiennent une information sur la position de la sphère.

A partir des données CDM, la décomposition en valeurs singulières nous donne une distribution

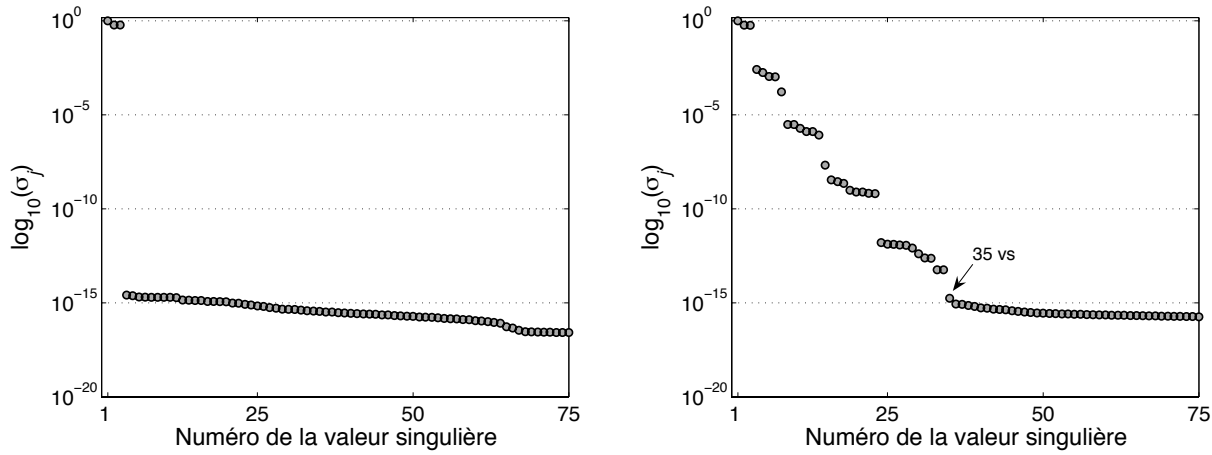


FIGURE 4.28 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

plus ou moins continue. Ceci peut être expliqué par le fait, comme mentionné ci-dessous, que l'objet est discrétisé en petits éléments cubiques et que, en conséquence, chaque élément représente un dipôle qui va rayonner selon ses trois moments dipolaires induits. Vu la continuité du spectre, nous nous retrouvons face à la difficulté du choix du nombre de valeurs singulières représentant le sous-espace signal contrairement à la méthode asymptotique.

Nous allons donc essayer d'abord avec les 35 valeurs singulières que l'on peut distinguer visuellement sur le spectre (voir Fig. 4.28) puis uniquement avec les trois premières valeurs singulières du premier palier. Le résultat de MUSIC est une fonction d'estimation évaluée sur tous les points du maillage de notre cube de recherche.

On s'intéresse aux régions de l'espace d'investigation où la fonction  $W$  atteint son maximum absolu ou relatif. Nous allons utiliser l'appellation « isosurface » pour désigner la représentation graphique 3D de l'enveloppe (surface) des points  $\mathbf{x}$  du cube de recherche à l'intérieur de laquelle les valeurs prises par  $W(\mathbf{x})$  sont supérieures ou égales à un pourcentage de la valeur du maximum absolu. Par exemple lorsque nous parlons « d'isosurface à 20% » cela veut dire l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  du cube de recherche tels que  $W(\mathbf{x}) \geq 20\%$  de  $\max(W(\mathbf{x}))$  cube de recherche.

La figure 4.29 nous montre trois isosurfaces à 20%. La première est basée sur les données asymptotiques en prenant en compte les trois valeurs singulières non nulles, la deuxième et la troisième isosurfaces sont obtenues à partir des données CDM avec respectivement 3 et 35 valeurs singulières. Toutes choses considérées, ces isosurfaces sont très semblables.

Ajoutons un bruit gaussien de 10dB de signal à bruit à la matrice MSR pour préciser le comportement de la distribution des valeurs singulières. On trace la distribution des valeurs singulières de la matrice MSR bruitée. La figure 4.30 nous montre que les valeurs singulières du sous-espace bruit possèdent maintenant des valeurs numériques plus grandes et qu'on obtient des distributions

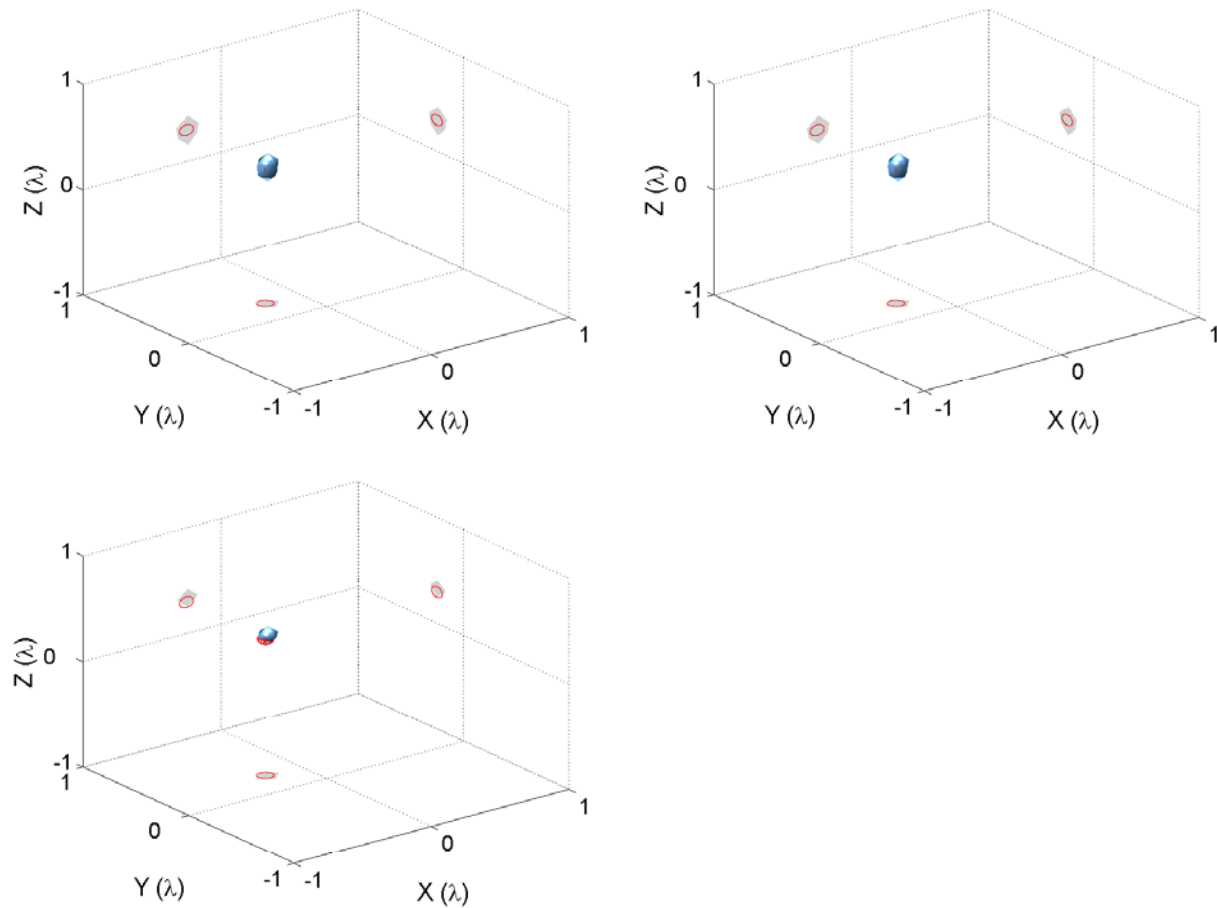


FIGURE 4.29 – Imagerie en 3D avec une isosurface de 20%. (En haut à gauche) données asymptotiques avec 3 valeurs singulières, (en haut à droite) données CDM en utilisant les 3 premières valeurs singulières et (en bas) données CDM en utilisant 35 valeurs singulières (cf. Fig. 4.28).

des valeurs singulières identiques, distinguant seulement trois valeurs singulières non nulles pour les deux méthodes, CDM et asymptotique. Donc, parmi les 35 valeurs singulières de la matrice MSR non bruitée calculée par CDM, seules les trois valeurs singulières dominantes ont « résisté » au bruit ajouté.

Sur la figure 4.31, on observe la détection de la position de la sphère par l'imagerie MUSIC. Les deux images en 3D obtenues par les deux méthodes sont identiques (elles sont obtenues avec une isosurface de 20% en utilisant les seules trois valeurs singulières non nulles).

**Cas d'une sphère de rayon  $\lambda/10$  :** Intéressons-nous à un plus grand rayon, en considérant que la sphère est de rayon  $0.06 \text{ m} = \lambda/10$ . Nous rappelons que la comparaison du champ électrique diffracté par une sphère de rayon  $\lambda/10$  calculé par les deux méthodes (CDM et asymptotique) nous donne des résultats voisins avec une erreur sur la partie réelle de 11,37% et sur la partie imaginaire de 10,71% près, (par rapport à l'amplitude, l'erreur est de 3,64%).

La distribution des valeurs singulières normalisées à partir des données asymptotiques et CDM

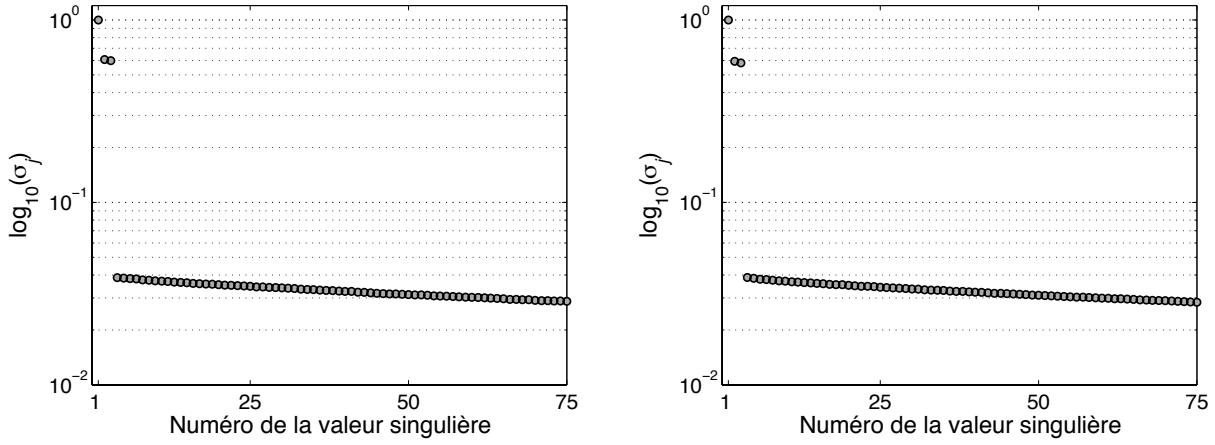


FIGURE 4.30 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$  avec un rapport signal sur bruit de 10dB. (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

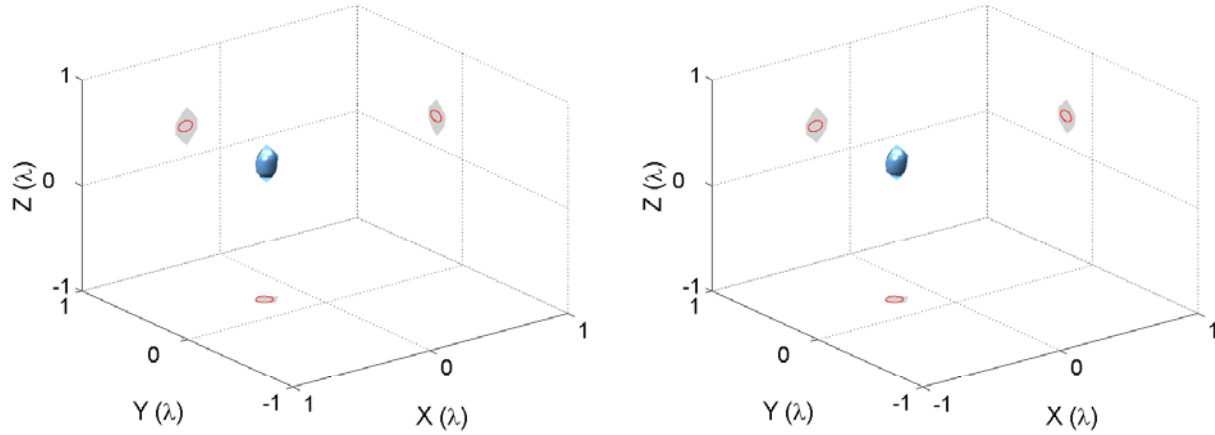


FIGURE 4.31 – Imagerie en 3D avec une isosurface de 20% en utilisant les 3 premières valeurs singulières. (A gauche) les données asymptotiques et (à droite) les données CDM (cf. Fig. 4.30).

pour une sphère de rayon  $\lambda/10$ , en ajoutant dans la matrice MSR un bruit de rapport signal à bruit de 10 dB, est représentée Sur la figure 4.34. De la même manière que pour le cas d'une sphère de rayon  $\lambda/20$ , on obtient deux distributions de valeurs singulières identiques où l'on distingue nettement trois seules valeurs singulières non nulles.

Si on applique la méthode d'imagerie MUSIC en 3D, on obtient alors deux images identiques avec une isosurface de 20% en utilisant les 3 valeurs singulières non nulles (voir Fig. 4.35). Comme précédemment, l'introduction de bruit « égalise » complètement les résultats. On se référera aux figures 4.34 et 4.35.

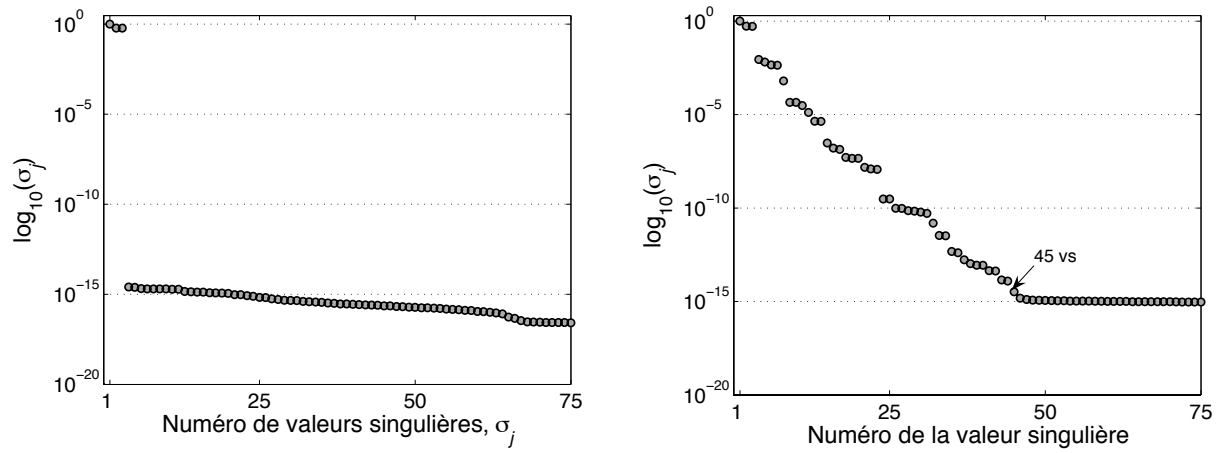


FIGURE 4.32 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/10$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

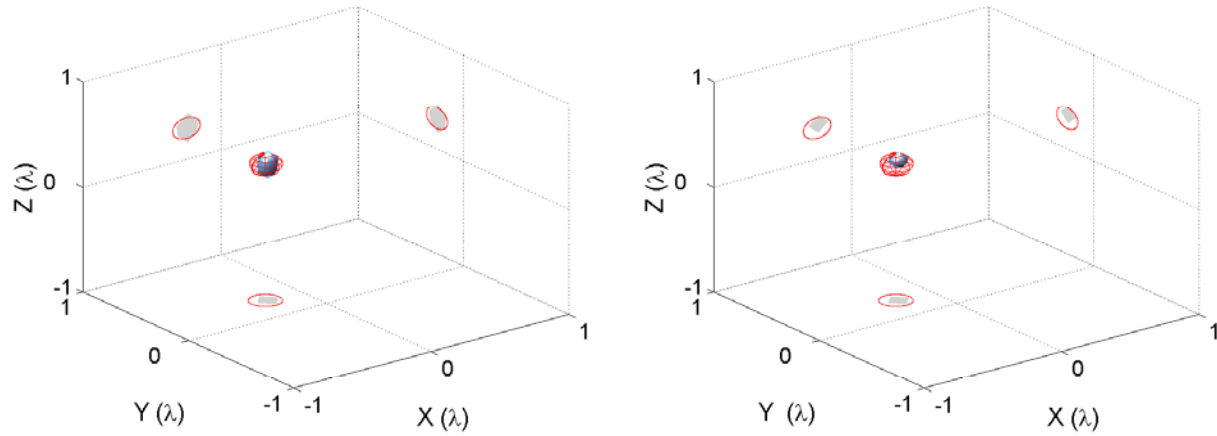


FIGURE 4.33 – Imagerie en 3D avec une isosurface de 20%. (A gauche) données asymptotiques avec 3 valeurs singulières, (à droite) données CDM avec 45 valeurs singulières (cf . Fig. 4.32).

#### 4.8.2 Inclusion magnétique

On considère une sphère magnétique de rayon  $0,03 \text{ m} = \lambda/20$  et de perméabilité  $5\mu_0$ . On trace sur la figure 4.36 la distribution des valeurs singulières de la matrice MSR non bruitée calculée par la formule asymptotique. On distingue deux valeurs singulières non nulles associées à deux vecteurs singuliers. On applique la méthode d'imagerie MUSIC en utilisant ces deux valeurs singulières. La position de la sphère est effectivement bien détectée.

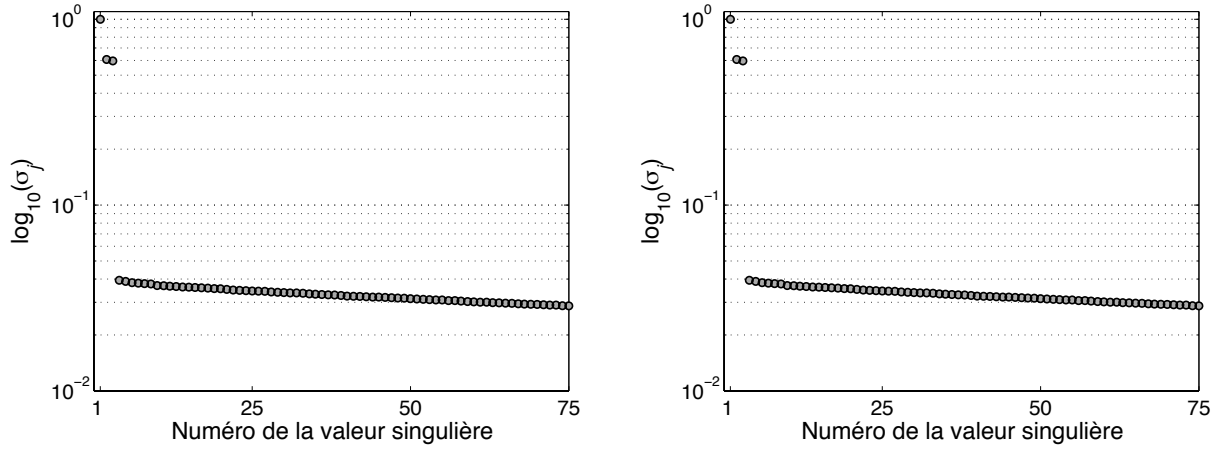


FIGURE 4.34 – La distribution des valeurs singulières avec introduction de rapport signal sur bruit de 10 dB dans la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/10$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

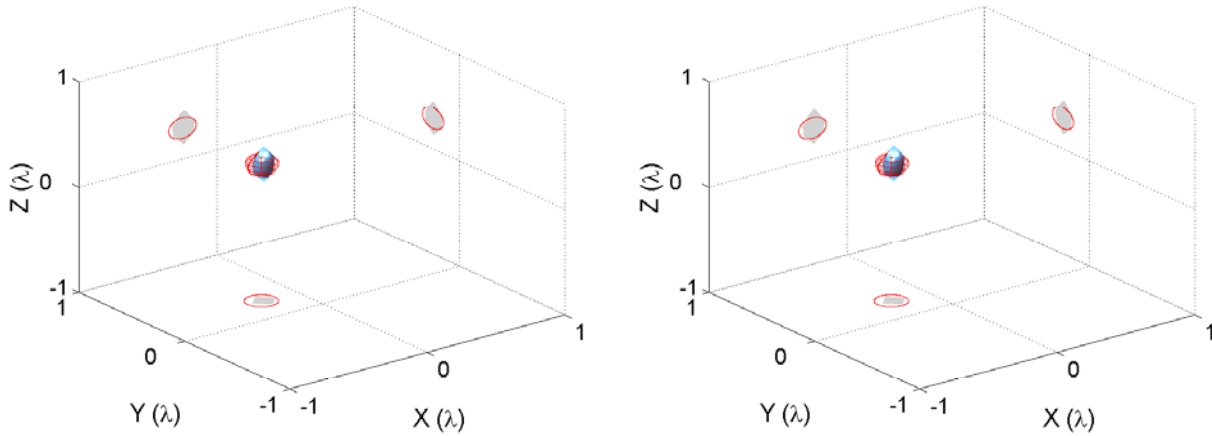


FIGURE 4.35 – Comme en Fig. 4.31 avec introduction de bruit de rapport signal sur bruit de 10dB dans la matrice MSR (à gauche) données asymptotiques avec 3 premières valeurs singulières et (à droite) données CDM avec 3 valeurs singulières (cf. Fig. 4.34).

### 4.8.3 Inclusion sphérique diélectrique et magnétique

On considère une inclusion sphérique diélectrique-magnétique de rayon  $0,03 \text{ m} = \lambda/20$ , de permittivité  $5\epsilon_0$  de perméabilité  $5\mu_0$  telle qu'illustrée sur la figure 4.37. La distribution des valeurs singulières de la matrice MSR non bruitée calculée par la formule asymptotique permet de distinguer deux valeurs singulières non nulles associées à deux vecteurs singuliers. On applique la méthode d'imagerie MUSIC en utilisant ces deux valeurs singulières et on détecte la position de la sphère.

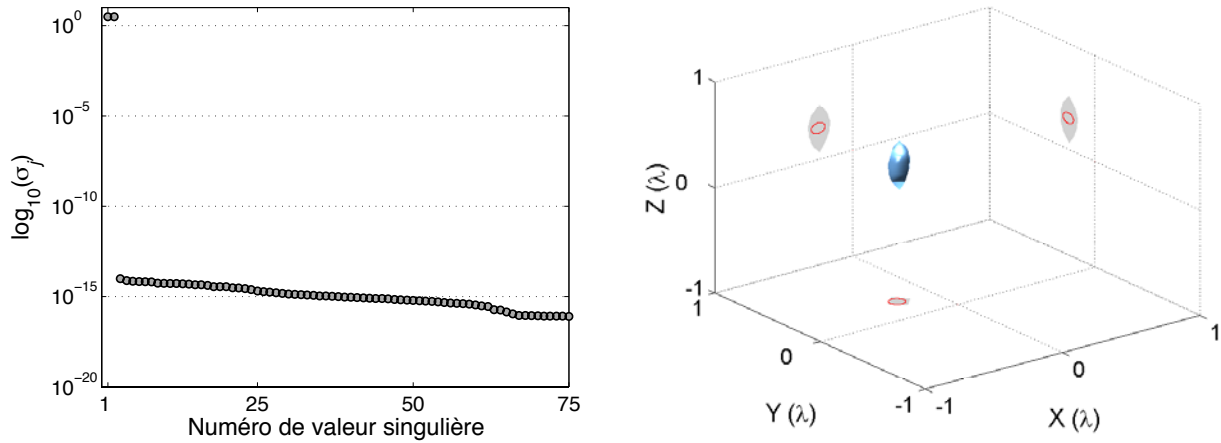


FIGURE 4.36 – (A gauche) la distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère magnétique de rayon  $\lambda/20$  calculée par la formule asymptotique. (A droite) imagerie en 3D par l'algorithme MUSIC avec une isosurface de 20%.

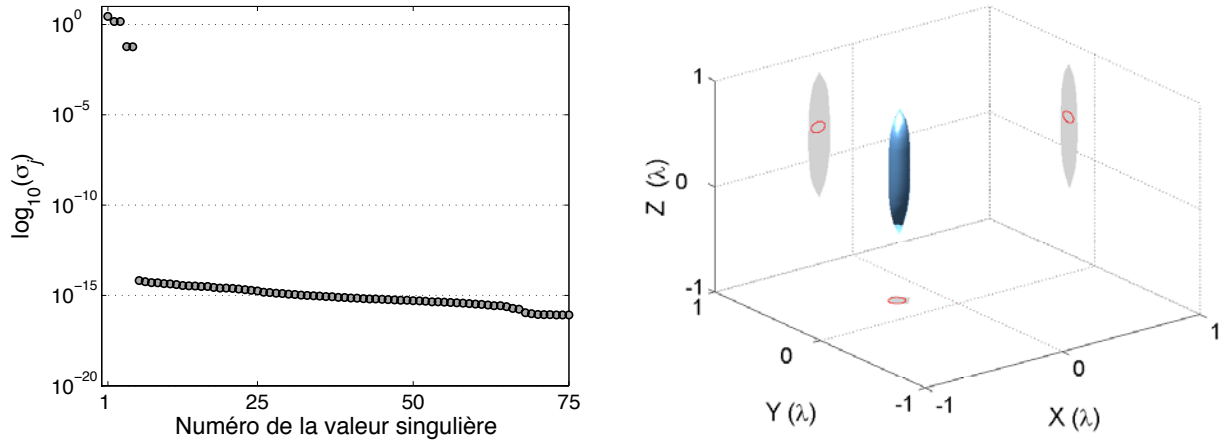


FIGURE 4.37 – (A gauche) La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour une sphère diélectrique-magnétique de rayon  $\lambda/20$  avec un réseau de dipôles polarisés verticalement à partir des données asymptotiques, (à droite) l'imagerie MUSIC avec une iso-surface de 20%.

#### 4.8.4 Inclusion ellipsoïdale

On considère une inclusion ellipsoïdale diélectrique à la position  $(-0,15 \text{ m} ; 0,15 \text{ m} ; 0,175 \text{ m})$ , de permittivité  $5\varepsilon_0$  et de semi-axes  $(0,06 \text{ m} ; 0,03 \text{ m} ; 0,02 \text{ m}) = (\lambda/10, \lambda/20, \lambda/30)$ , cf. Fig. 4.38.

On trace la distribution des valeurs singulières normalisées à partir des données asymptotiques et CDM pour un ellipsoïde diélectrique. On obtient deux distributions de valeurs singulières différentes où l'on distingue nettement 3 valeurs singulières non nulles à partir des données asymptotiques alors que le spectre des données CDM fournit 40 valeurs singulières non nulles.

La figure 4.39 nous montre trois isosurfaces à 20%. La première est basée sur les données



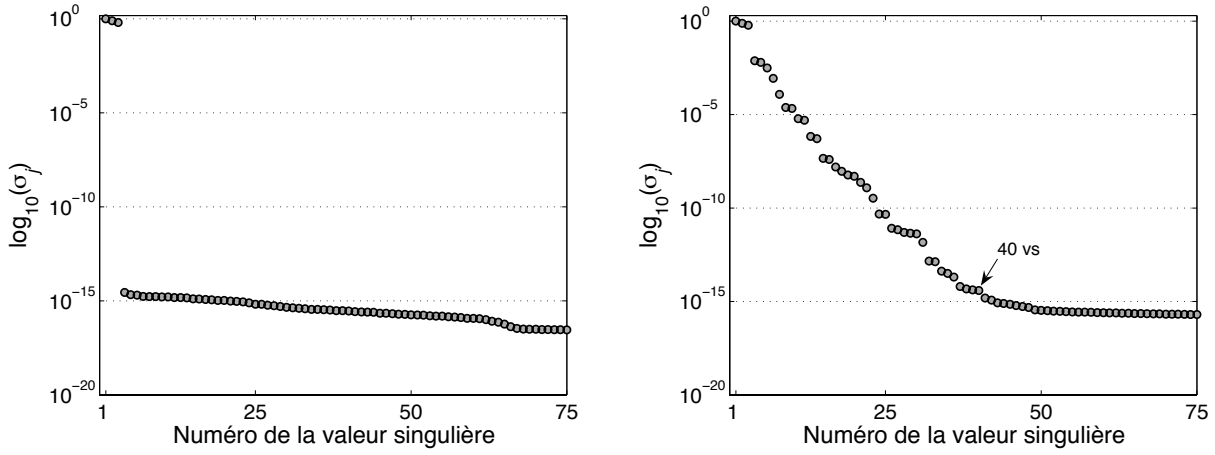


FIGURE 4.38 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour un ellipsoïde de semi-axes  $(\lambda/10, \lambda/20, \lambda/30)$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

asymptotiques en prenant en compte les 3 valeurs singulières non nulles, la deuxième et la troisième isosurfaces sont obtenues à partir des données CDM avec respectivement 3 et 40 valeurs singulières.

#### 4.8.5 Détermination de l'orientation de l'inclinaison d'un ellipsoïde

Une fois que la position de l'inclusion est retrouvée en appliquant la méthode d'imagerie MUSIC, nous déplaçons une ligne d'antennes horizontalement de façon à la centrer au-dessus de l'inclusion. Nous réalisons une série de mesures en effectuant à chaque fois une rotation du réseau de dipôles de façon à balayer les angles possibles (de 0 à  $\pi$ ). Puis en étudiant la variation de la valeur singulière dominante de la matrice multistatique en fonction de l'angle de rotation du réseau, nous arrivons à déterminer l'angle d'inclinaison de l'ellipsoïde enfoui [11]<sup>1</sup>.

On considère dans les simulations suivantes une ligne d'antennes de 21 dipôles avec une polarisation croisée selon l'axe  $x$  et l'axe  $y$ . La ligne d'antennes est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , placée parallèlement à l'axe  $x$ . Cette ligne d'antennes est éloigné de l'origine du repère de  $5\lambda$ . L'espacement entre les dipôles est  $\lambda/2$ . L'ellipsoïde est centré à l'origine. Il possède une permittivité de  $5\epsilon_0$ . On fait tourner l'ellipsoïde selon les angles de rotation  $\phi$  (angle de rotation autour de l'axe  $z$ ) et  $\theta$  (angle entre le semi-axe et l'axe  $z$ ).

##### Ellipsoïde allongé :

Ici, on considère que l'ellipsoïde est allongé selon l'axe  $z$  et qu'il possède comme semi-axes (0,01

1. Nous avons détecté dans cet article de Chambers et Berryman une faute au niveau de tableau 1 dans le cas d'une aiguille diélectrique

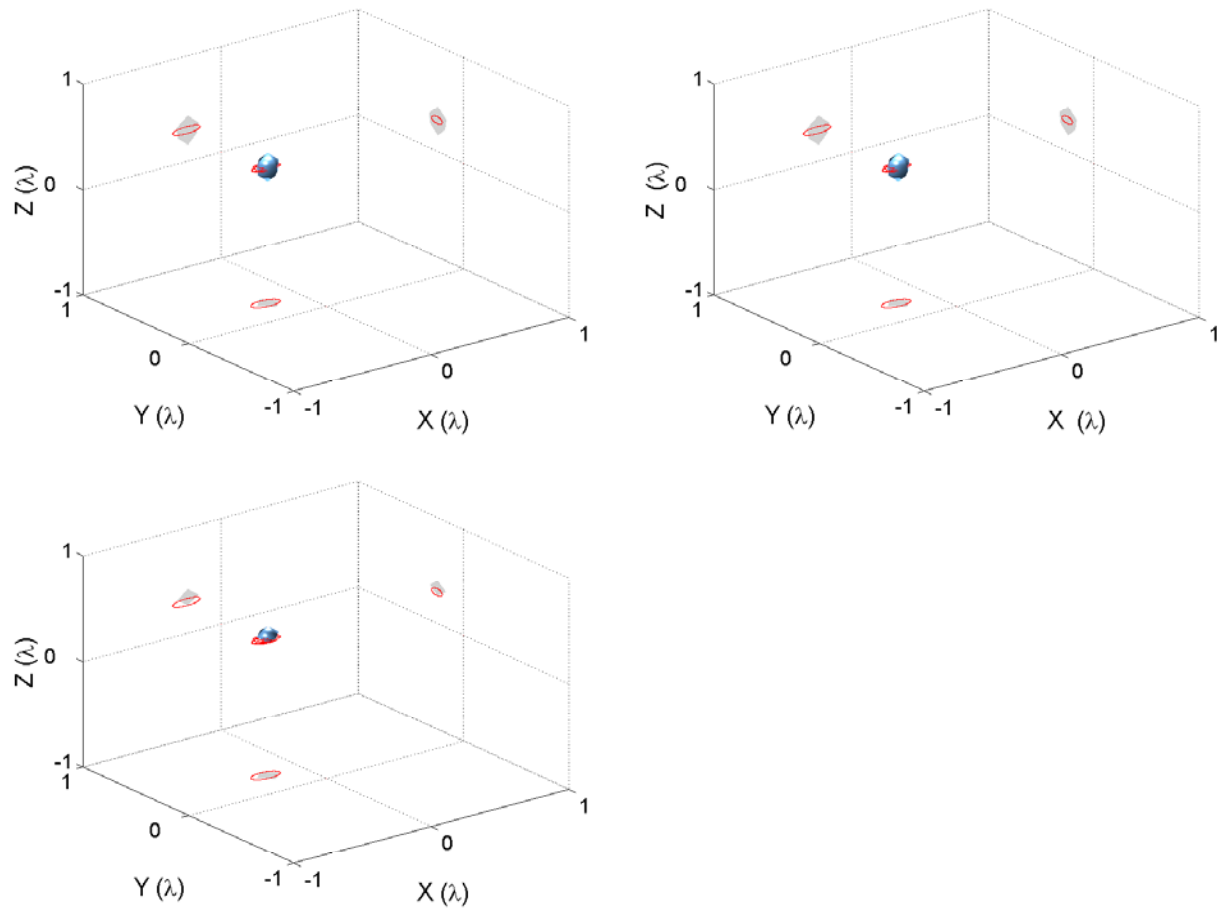


FIGURE 4.39 – Imagerie en 3D avec une iso-surface de 20% d'un ellipsoïde diélectrique, (en haut à gauche) des données asymptotiques avec 3 valeurs singulières et (en haut à droite) des données CDM avec trois valeurs singulières, (en bas) des données CDM avec 35 valeurs singulières (cf. Fig. 4.38).

m ; 0,01 m ; 0,03 m), cf. Fig. 4.40.

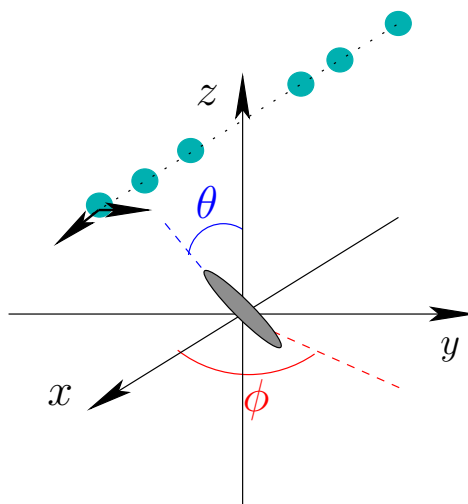


FIGURE 4.40 – Détermination de l'orientation d'un ellipsoïde allongé.

Dans la simulation résumée figure 4.41, on trace les trois valeurs singulières non nulles en fonction de  $\phi$ , en fixant l'angle  $\theta = \pi/4$ . On observe que lorsque la première valeur singulière atteint un maximum, la deuxième valeur singulière atteint un minimum, et la troisième valeur singulière est très petite. Cet état est atteint à chaque fois que l'ellipsoïde allongé est orienté parallèlement à la ligne d'antennes.

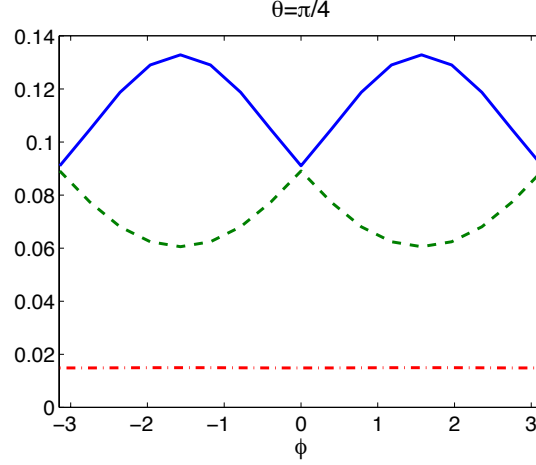


FIGURE 4.41 – Comportement des 3 valeurs singulières en fonction de  $\phi$  pour le cas d'un ellipsoïde allongé de semi-axes  $(\lambda/60; \lambda/60; \lambda/20)$  incliné selon  $\theta$  d'un angle  $\pi/4$ .

Maintenant, on fait varier les deux angles de rotation  $\theta$  et  $\phi$ . La figure 4.42 nous montre que lorsque la ligne d'antennes et l'ellipsoïde allongé sont orientés parallèlement, la première valeur singulière atteint un maximum, la deuxième valeur singulière atteint un maximum, et la troisième valeur singulière est très petite.

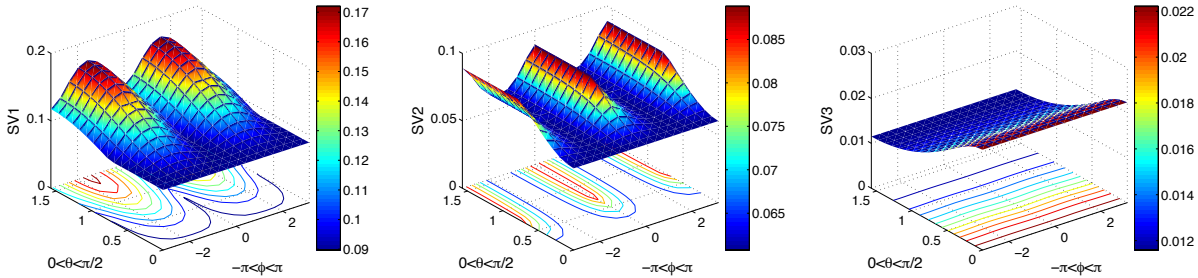


FIGURE 4.42 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction de  $\theta$  et  $\phi$  pour un ellipsoïde allongé.

### Ellipsoïde aplati :

Dans cette simulation, on considère que l'ellipsoïde est un ellipsoïde aplati de semi-axes  $(0,03 \text{ m}; 0,03 \text{ m}; 0,01 \text{ m})$ , cf. Fig. 4.43.

Tout d'abord, on trace les trois valeurs singulières en fonction de  $\phi$ , en fixant l'angle  $\theta = \pi/4$ . Sur la figure 4.43 on constate que lorsque la première valeur singulière atteint un maximum, la

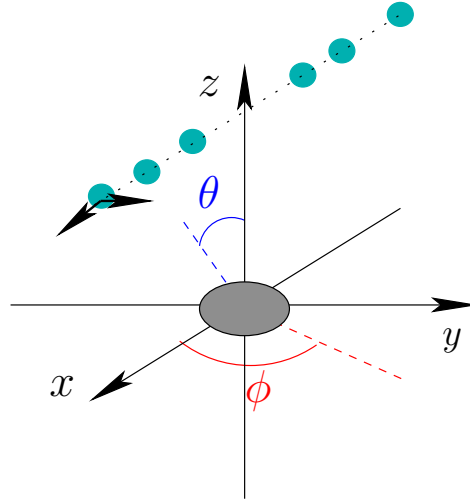


FIGURE 4.43 – Détermination de l'orientation d'un ellipsoïde aplati de semi-axes  $(\lambda/20; \lambda/20; \lambda/60)$ .

deuxième valeur singulière atteint un minimum, et la troisième valeur singulière est très petite. Ce cas correspond à la configuration où la ligne d'antennes et l'ellipsoïde aplati sont orientés parallèlement.

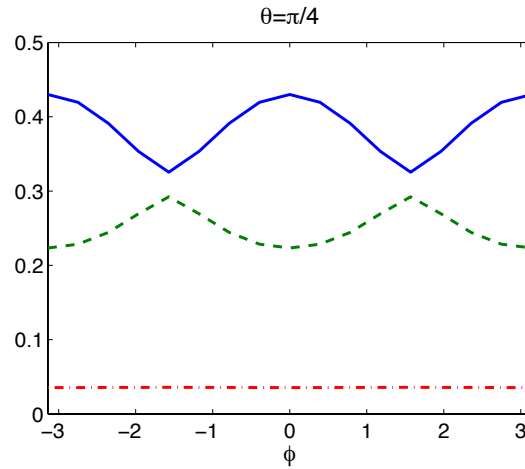


FIGURE 4.44 – Comportement des 3 valeurs singulières en fonction de  $\phi$  pour le cas d'un ellipsoïde aplati de semi-axes  $(\lambda/20; \lambda/20; \lambda/60)$  incliné selon  $\theta$  d'un angle  $\pi/4$ .

Dans la simulation de la figure 4.45, on fait varier les deux angles de rotation  $\theta$  et  $\phi$ . On obtient que lorsque la première valeur singulière atteint un maximum, la deuxième valeur singulière atteint un minimum, et la troisième valeur singulière est très petite. Dans ce cas, la ligne d'antennes et l'ellipsoïde aplati sont orientés parallèlement.

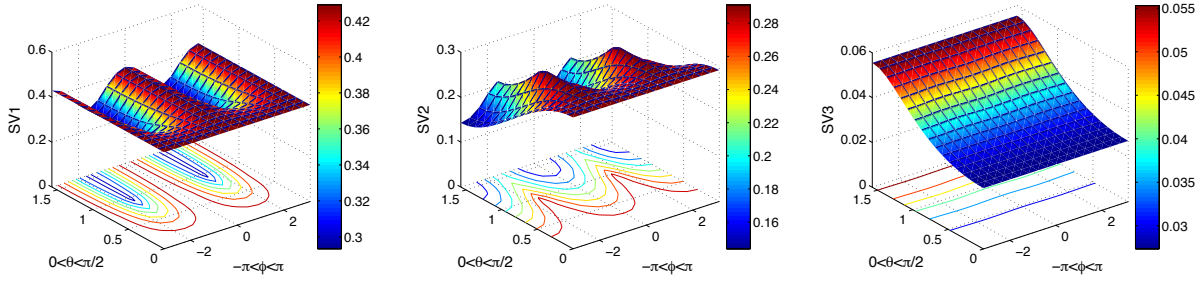


FIGURE 4.45 – Comportement des trois valeurs singulières en fonction de  $\theta$  et  $\phi$  pour un ellipsoïde aplati.

#### 4.8.6 Super-localisation pour le cas de deux sphères couplées

Dans les simulations suivantes, on considère deux sphères diélectriques placées sur l'axe horizontal  $x$ , la position de la sphère 1 est  $(-x; 0; 0)$  et la position de la sphère 2 est  $(x; 0; 0)$ . Ces deux sphères sont de même rayon  $\lambda/20$  et de même permittivité  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$ . Elles sont illuminées par un réseau linéaire horizontal de  $13 \times 13$  dipôles polarisés verticalement. Ce réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , et est placé à une hauteur  $h = 2\lambda$  par rapport aux positions des deux sphères. L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ .

Pour appliquer la méthode d'imagerie MUSIC, il faut, tout d'abord, analyser la distribution des valeurs singulières. Si on suppose que la matrice MSR est obtenue via le champ diffracté par les deux sphères couplées dont les centres sont séparés d'une distance  $d = \lambda/9$  calculé par la formule asymptotique sans ajouter un bruit gaussien, on distingue alors six valeurs singulières non nulles qui correspondent au sous-espace signal, voir Fig. 4.46.

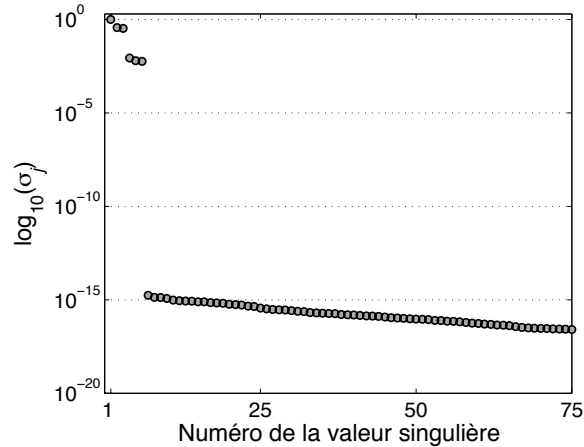


FIGURE 4.46 – La distribution des valeurs singulières de la matrice MSR non bruitée dans le cas de deux sphères diélectriques pour  $d = \lambda/9$  (données asymptotiques).

Notons qu'à chaque sphère diélectrique correspondent 3 valeurs singulières non nulles [4]. Il suffit alors de tracer la fonction  $W(\mathbf{x})$  à chaque point du maillage du cube de recherche pour détecter la position de chaque sphère. Ici, on considère que le cube est de taille  $[2\lambda \times 2\lambda \times 2\lambda]$ , et qu'il est

centré par rapport à l'origine, avec un maillage de taille  $\lambda/10$ .

La figure 4.47 nous montre, à première vue, qu'on obtient une seule tache alors qu'on s'attend à en obtenir deux. Mais, si on effectue un zoom sur la position estimée avec un plus petit cube de recherche de  $[\lambda/4 \times \lambda/4 \times \lambda/4]$  et donc en utilisant un maillage ayant un plus petit pas de  $\lambda/80$ , de cette manière on obtient bien deux taches indiquant une estimation exacte de la position des centres des deux sphères.

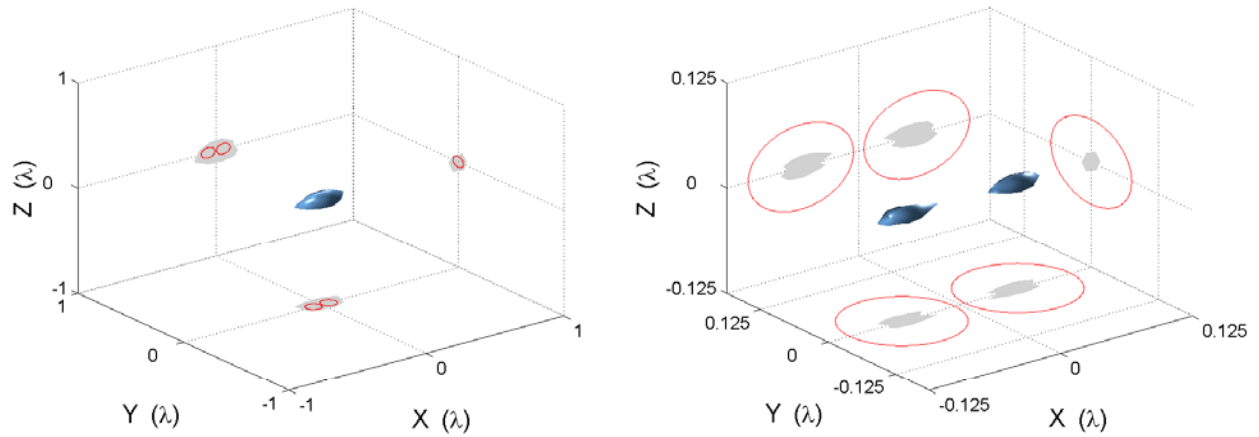


FIGURE 4.47 – Imagerie en 3D par MUSIC (isosurface 60 %) de deux sphères couplées pour  $d = \lambda/9$  en utilisant 6 valeurs singulières.

Pour prendre en compte la diffraction multiple entre deux sphères couplées dans un milieu homogène on peut soit calculer un nouveau tenseur de polarisation via une approche basée sur le système de coordonnées bisphériques, soit utiliser le modèle Foldy-Lax. Il est tout à fait légitime de se demander si la prise en compte du couplage entre les deux sphères va améliorer la résolution de l'imagerie. Pour bien analyser ce point, nous avons comparé les valeurs de la fonction d'estimation  $W(\mathbf{x})$  le long de l'axe des  $x$  (qui traverse les centres des deux sphères) calculées avec et sans prendre en compte l'effet du couplage. La figure 4.48 montre qu'on obtient trois courbes identiques. Donc la prise en compte de l'effet du couplage dans le calcul de la matrice MSR n'améliore pas la résolution de l'imagerie MUSIC comme déjà indiqué dans [8]. D'ailleurs, signalons qu'on obtient la même distribution des valeurs singulières.

On vient de voir que la prise en compte de l'effet du couplage n'améliore pas la résolution de l'imagerie. Maintenant, on va étudier l'effet d'un bruit additif sur la résolution. Si on ajoute un bruit gaussien dans la matrice MSR, on remarque que lorsque les deux sphères sont très proches et lorsque le rapport signal à bruit est de petite valeur, on distingue seulement trois valeurs singulières non nulles au lieu de six et l'estimateur MUSIC atteint un maximum à une seule position entre les centres des deux sphères.

Ceci est illustré sur la figure 4.49, où l'on constate que, pour une distance entre les centres des deux sphères de  $d = \lambda/9$ , et sans aucun bruit on détecte avec précision les positions des deux

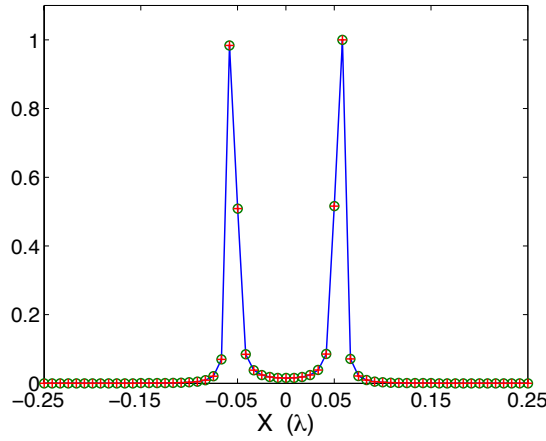


FIGURE 4.48 – Imagerie de deux sphères couplées pour  $d = \lambda/9$ . Courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères avec et sans prendre l'effet du couplage : coordonnées bisphériques ( $o$ ), modèle Foldy-Lax ( $\times$ ) et sans couplage ( $—$ ).

sphères, mais lorsqu'on ajoute du bruit de rapport signal à bruit de 20 dB, de 10 dB et de 5 dB, on ne distingue plus deux positions mais une seule. La position détectée est dans l'intervalle entre les centres des deux sphères. A partir d'une distance entre les deux sphères supérieure à  $\lambda/4$ , et même en ajoutant un bruit important entre 5 dB et 20 dB à la matrice MSR, on distingue bien la position de chaque sphère.

Nous avons tracé la courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères pour différents niveaux de bruit. Dans la simulation de la figure 4.50, on trace l'estimateur MUSIC en 3 D, en prenant le cas de deux sphères de même rayon et de même permittivité, séparées par une distance entre les centres de  $d = \lambda/9$  et en introduisant un bruit additif de 10 dB dans la matrice MSR. On obtient que la position estimée correspond exactement au milieu.

Les résultats précédents peuvent être complétés par ceux de la figure 4.51. Ici, la permittivité de la sphère 2 (à droite) a été augmentée à  $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$  et la permittivité de la sphère 1 (à gauche) a été diminuée à  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ . Les données bruitées (ici 5dB) font que l'algorithme MUSIC ne détecte qu'un seul diffracteur centré quelque part dans l'intervalle entre les deux positions réelles, et il est clairement plus proche de la sphère qui possède la plus grande permittivité. Les résultats de cette simulation confirment aussi les remarques déjà formulées dans [4].

### Comparaison avec les données CDM pour le cas de deux sphères couplées

On considère deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités  $5\varepsilon_0$  et  $3\varepsilon_0$ . Ces deux sphères sont illuminées par un réseau horizontal émetteurs/récepteurs de  $21 \times 21$  dipôles polarisés verticalement. Ce réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ . Il est placé à une distance  $h = 3 \text{ m}$  par rapport à l'origine du repère. L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ .

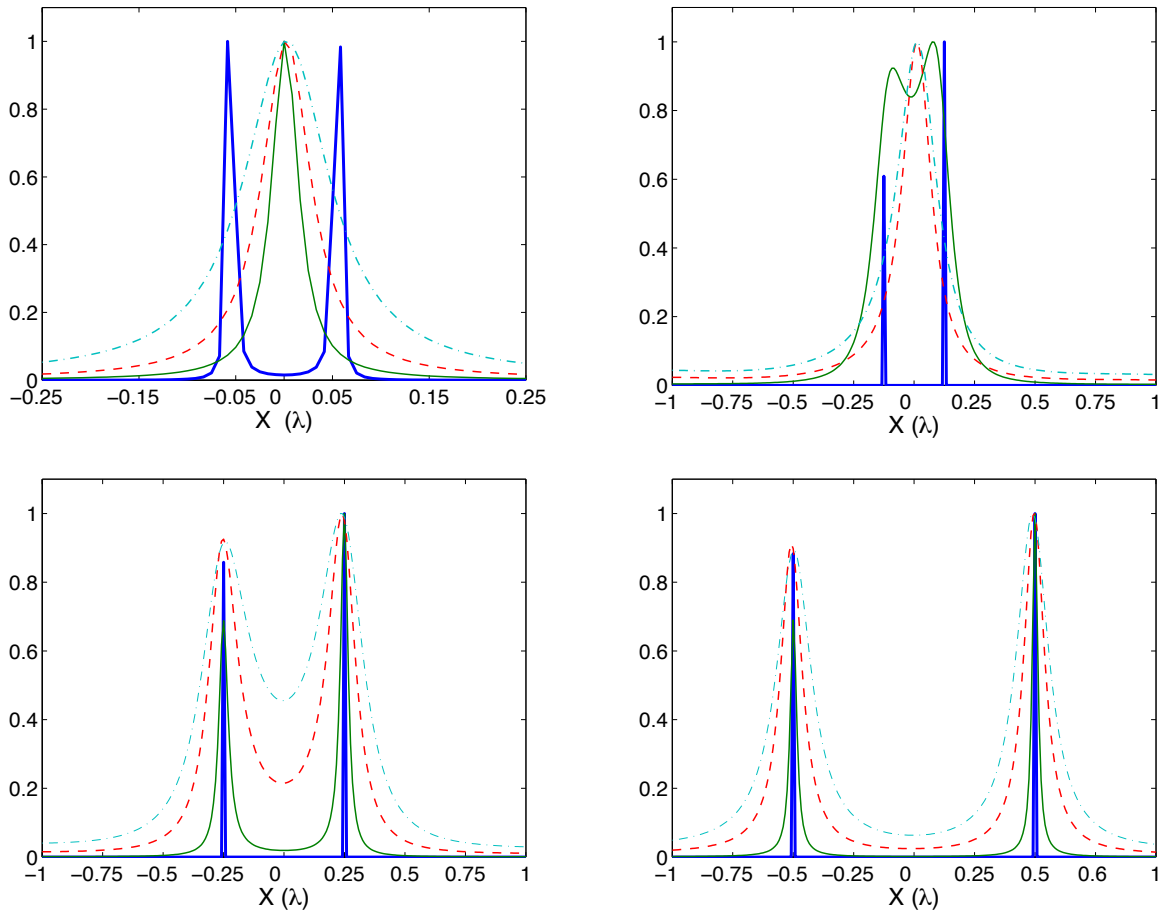


FIGURE 4.49 – Imagerie de deux sphères pour  $d = \lambda/9$  (en haut à gauche),  $\lambda/4$  (en haut à droite),  $\lambda/2$  (en bas à gauche) and  $\lambda$  (en bas à droite). Courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères pour différents niveaux de bruit. (courbe en trait continu fort) : sans bruit, (courbe en trait Continu fin) : un bruit de 20 dB, (courbe en trait interrompu) : un bruit de 10dB, (courbe en trait mixte) : un bruit de 5 dB.

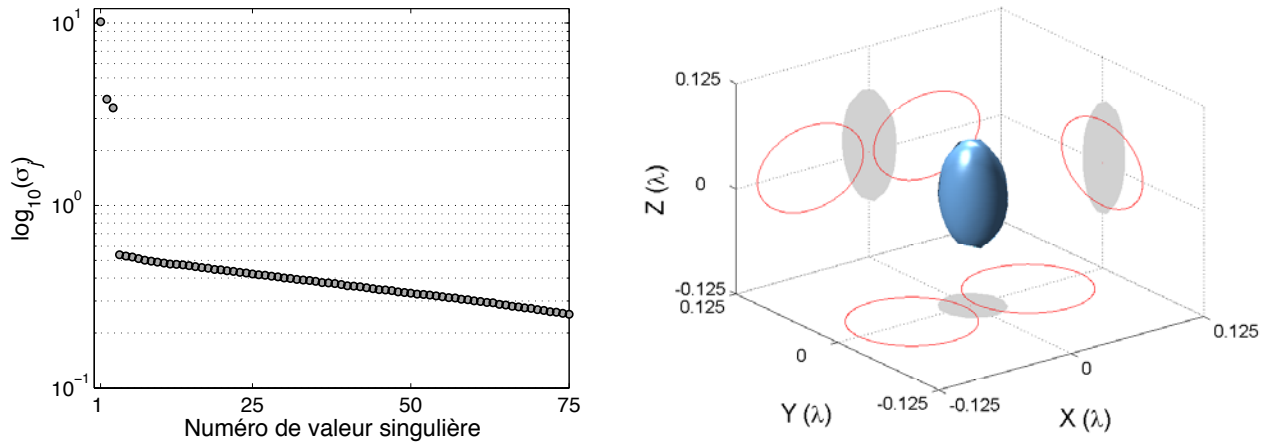


FIGURE 4.50 – Imagerie par la méthode MUSIC (isosurface 60%) avec un bruit de 10 dB en utilisant les trois valeurs singulières.



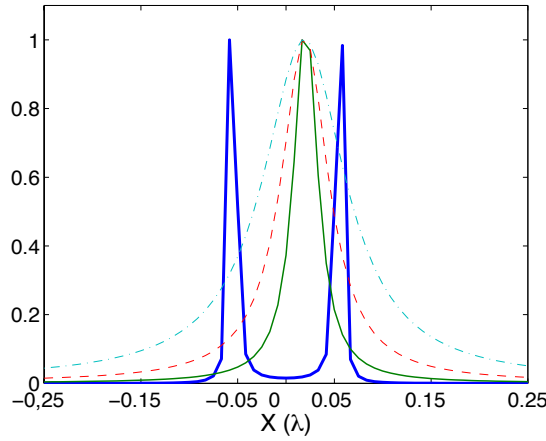


FIGURE 4.51 – Comme en Fig. 4.49 pour deux sphères couplées de différentes permittivités  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$  (sphère à gauche) et  $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$  (sphère à droite), pour  $d = \lambda/9$ .

Dans la simulation de la figure A.8, on trace la distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR calculée à partir des données asymptotiques et CDM. A partir des données asymptotiques, on distingue 6 valeurs singulières non nulles. Mais à partir des données CDM, le nombre des valeurs singulières significatives n'est pas toujours facile à déterminer. Lorsque les valeurs singulières se stabilisent, les valeurs restantes sont d'habitude contaminées avec un certain niveau de bruit et sont donc inutiles. A partir de la valeur 50, la distribution des valeurs singulières devient constante, donc les 49 valeurs singulières peuvent être considérées comme étant les valeurs significatives.

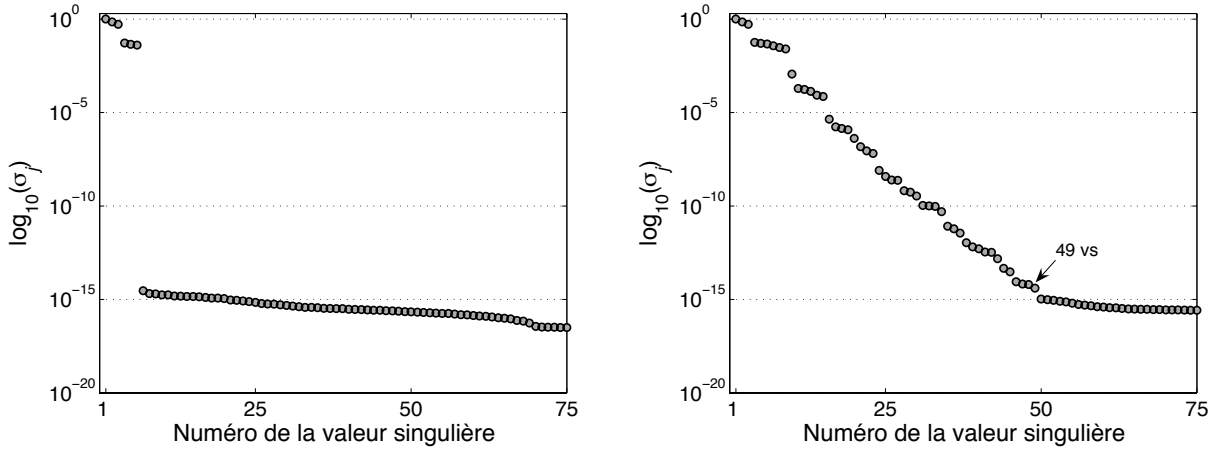


FIGURE 4.52 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  pour deux sphères diélectriques de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\varepsilon_0, 3\varepsilon_0$ ). (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

Une fois que le nombre des valeurs singulières a été fixé, on trace l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères à partir des données CDM et asymptotiques. La figure 4.53 nous montre qu'on détecte la position de chacune des deux sphères dans les deux cas. On constate qu'on obtient deux images presque identiques dans lesquelles on peut distinguer

facilement la sphère la plus diffractante (à gauche) qui a une permittivité plus grande que la sphère à côté.

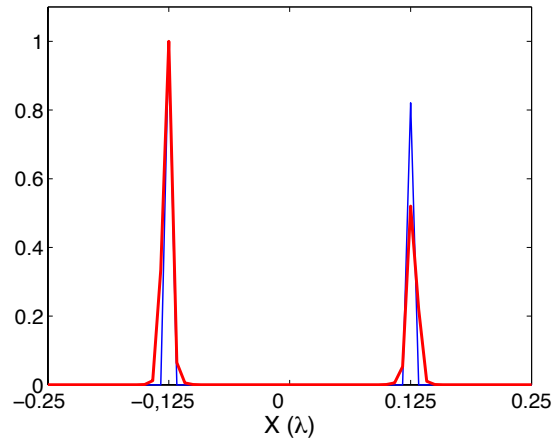


FIGURE 4.53 – Imagerie de deux sphères de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\varepsilon_0, 3\varepsilon_0$ ) à partir des données asymptotiques et CDM pour  $d = \lambda/4$ . Courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères. (Courbe en trait continu fort) à partir des données CDM, en utilisant les 50 premières valeurs singulières, (courbe en trait continu fin) à partir des données asymptotiques, en utilisant les 6 premières valeurs singulières.

Nous avons pris 50 valeurs singulières pour obtenir l'image des deux sphères. Si on prend 8 valeurs singulières non nulles au lieu de 50, on observe sur la figure 4.54 qu'il y a une difficulté pour distinguer la position des deux sphères. A partir de 9 valeurs singulières non nulles, on peut distinguer la position de chaque sphère.

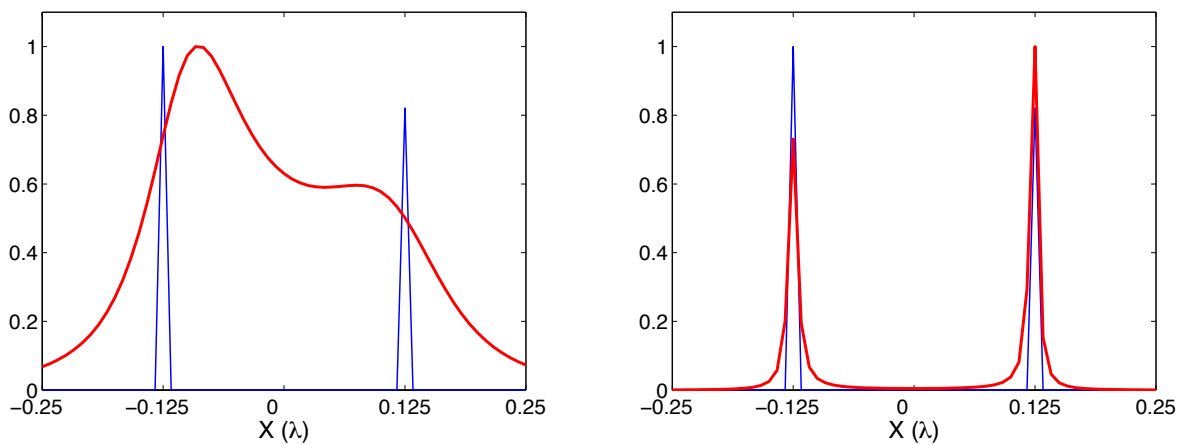


FIGURE 4.54 – Imagerie de deux sphères de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\varepsilon_0$  et  $3\varepsilon_0$ ) à partir des données asymptotiques et CDM pour  $d = \lambda/4$ . Courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères. (Courbe en trait continu fort) à partir des données CDM, (à gauche) en utilisant les 8 premières valeurs singulières, et (à droite) en utilisant les 9 premières valeurs singulières, (courbe en trait continu fin) à partir des données asymptotiques, en utilisant les 6 valeurs singulières.

Si l'on introduit dans la matrice MSR un premier niveau de bruit tel que le rapport signal à bruit soit 20dB, la figure 4.55 nous montre que les courbes de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  (qui traverse donc les centres des deux sphères) calculées par les deux méthodes en utilisant les 6 valeurs singulières non nulles sont identiques. On ne peut plus distinguer la position de chaque sphère mais l'on ne détecte qu'une seule position, proche de la sphère de plus grande permittivité.

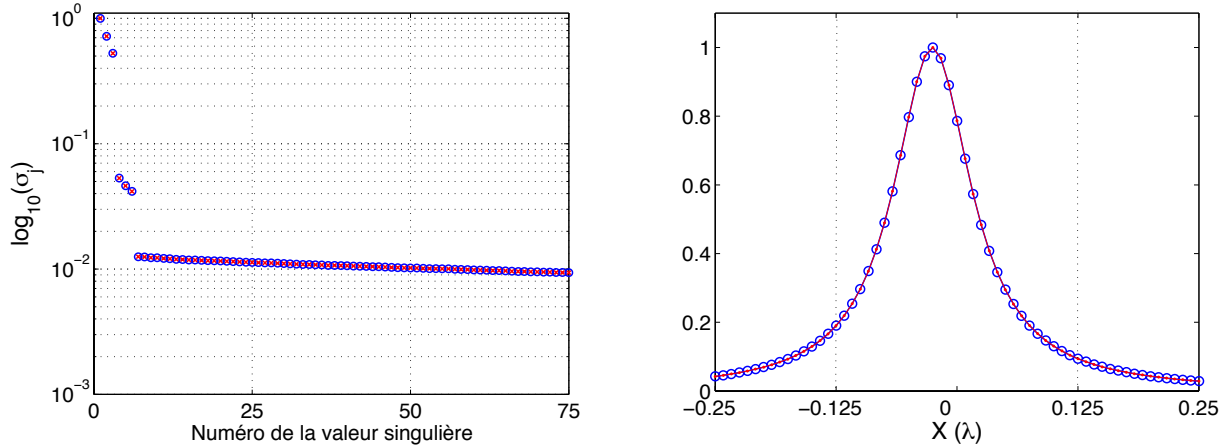


FIGURE 4.55 – (A gauche) La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR avec un bruit de 20dB de signal sur bruit obtenue à partir des données asymptotiques et CDM pour deux sphères diélectriques de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\epsilon_0$ ,  $3\epsilon_0$ ) : (courbe (o)) à partir des données CDM, (courbe (x)) à partir des données asymptotiques. (A droite) Courbe de l'estimateur MUSIC le long de l'axe  $x$  qui traverse les centres des deux sphères, (courbe (o)) à partir des données CDM, en utilisant les 6 premières valeurs singulières, (courbe (—)) à partir des données asymptotiques, en utilisant les 6 premières valeurs singulières.

## 4.9 Reconstructions des objets étendus

Dans les simulations suivantes, on considère une sphère diélectrique centrée à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$  de rayons successifs 0,09 m (15% de  $\lambda$ ), 0,12 m (20% de  $\lambda$ ), 0,18 m (30% de  $\lambda$ ) et 0,24 m (40% de  $\lambda$ ) et de même permittivité  $5\epsilon_0$ . La figure 4.56 nous montre que plus l'objet est étendu plus la distribution des valeurs singulières devient compliquée et décroît plus lentement.

Pour appliquer la méthode d'imagerie MUSIC, le choix du nombre de valeurs singulières significatives n'est pas toujours facile à faire. Lorsque les valeurs singulières se stabilisent, le reste des valeurs singulières est généralement contaminé avec beaucoup de bruit et elles ne sont donc pas utiles. La figure 4.57 nous montre que lorsque le rayon de la sphère est de 0,09 m (15% de  $\lambda$ ), on distingue bien la position de la sphère avec une isosurface de 1% en utilisant les 55 premières valeurs singulières non nulles au delà desquelles les valeurs singulières se stabilisent à  $10^{-14}$ , donc le nombre de valeurs singulières non nulles devait être 54. Lorsque la sphère est de rayon 0,12 m (20% de  $\lambda$ ), on détecte toujours la position de la sphère en utilisant les 60 valeurs singulières non nulles.

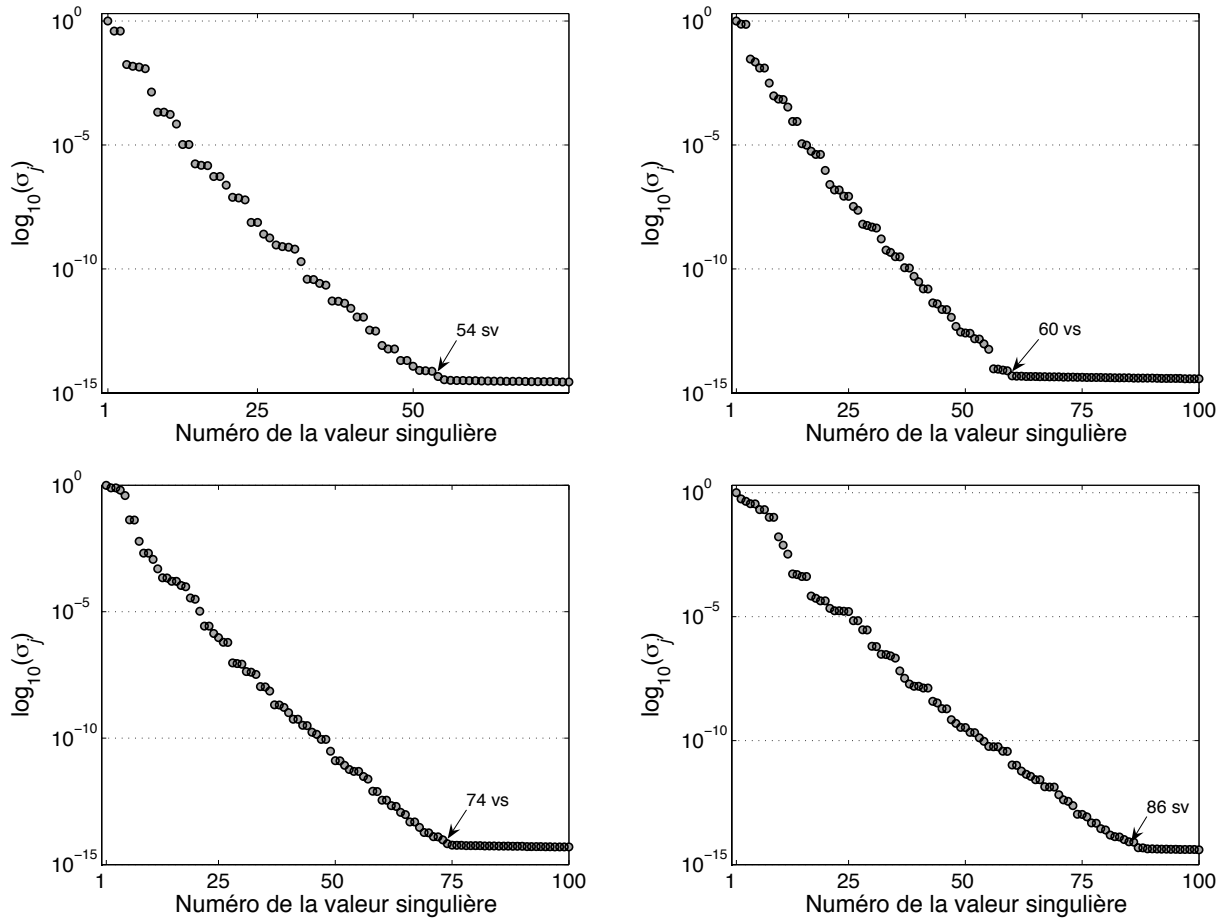


FIGURE 4.56 – La distribution des valeurs singulières pour des rayons successifs (en haut à gauche)  $0,09 \text{ m} = 15\% \lambda$ , (en haut à droite)  $0,12 \text{ m} = 20\% \lambda$ , (en bas à gauche)  $0,18 \text{ m} = 30\% \lambda$  et (en bas à droite)  $0,24 \text{ m} = 40\% \lambda$ .

Lorsque la sphère devient de rayon  $0,18 \text{ m}$  ( $30\%$  de  $\lambda$ ), on commence à distinguer une information sur la taille de l'objet en utilisant les 74 premières valeurs singulières non nulles. Lorsque la sphère est de rayon  $0,24 \text{ m}$  ( $40\%$  de  $\lambda$ ), on obtient à priori une information sur la géométrie de l'objet [40, 57, 32].

Jusqu'ici, les résultats d'imagerie en 3D ci-dessous par la méthode MUSIC sont obtenus par la matrice MSR sans ajouter de bruit additif. Maintenant, on introduit un bruit gaussien additif de 10 dB dans la matrice MSR pour chaque configuration. A partir de la figure 4.58, on constate que le niveau du sous-espace bruit augmente et qu'on ne distingue plus les mêmes distributions des valeurs singulières que dans les simulations précédentes. On remarque que le nombre de valeurs singulières significatives diminue. En effet, pour le cas d'une sphère de rayon  $0,09 = 15\% \lambda$  et de rayon  $0,12 = 20\% \lambda$ , on distingue seulement trois valeurs singulières non nulles au lieu de respectivement 54 et 60. Pour le cas d'une sphère de rayon  $0,18 = 30\% \lambda$ , on distingue cinq valeurs non nulles au lieu de 74, et neuf valeurs pour le cas d'une sphère de rayon  $0,24 = 40\% \lambda$  au lieu de 86.

Si l'on applique l'algorithme MUSIC basé sur ces matrices MSR bruitées, on distingue toujours

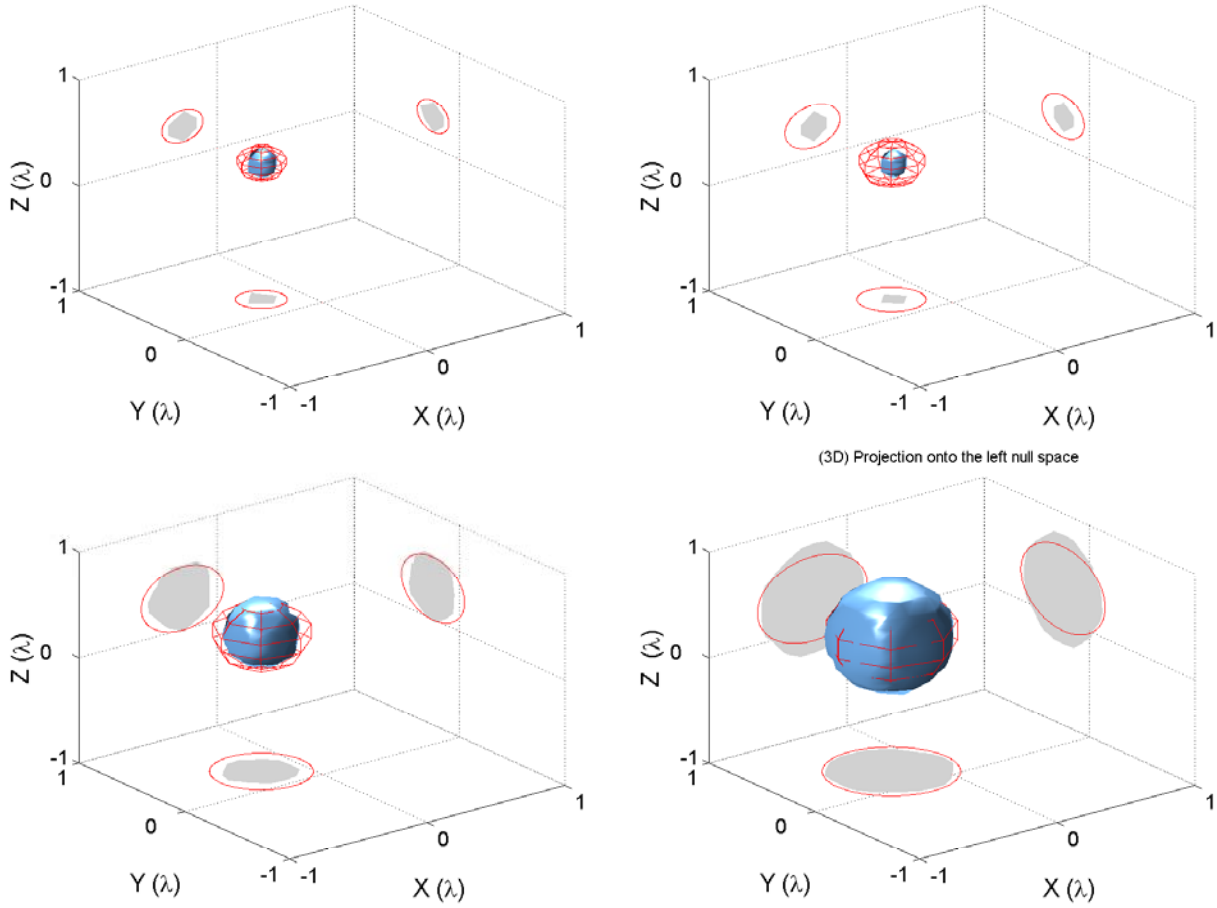


FIGURE 4.57 – Imagerie en 3D par l'algorithme MUSIC (1% isosurface) pour de rayons successifs (en haut à gauche)  $15\%\lambda$  en utilisant les 54 valeurs singulières non nulles, (en haut à droite)  $20\%\lambda$  en utilisant les 60 valeurs singulières non nulles, (en bas à gauche)  $30\%\lambda$  en utilisant les 74 valeurs singulières non nulles et (en bas à droite)  $40\%\lambda$  en utilisant les 86 valeurs singulières non nulles (cf. Fig. 4.56).

une information sur la position de l'inclusion pour chaque cas, voir Fig. 4.59.

#### 4.10 Analyse des valeurs singulières et des vecteurs singuliers en demi-espace

Dans un système de coordonnées cartésiennes, on suppose que le dipôle vertical  $j$  est centré à la position  $\mathbf{r}_j = \hat{x}r_{j,x} + \hat{y}r_{j,y} + \hat{z}h = \mathbf{r}_{j,s} + \hat{z}h$ , où  $h > 0$  et que l'inclusion  $D$  est centrée à la position  $\mathbf{x}_\star = \mathbf{x}_{s,\star} + \hat{z}x_\star$ ,  $x_\star < 0$ , (voir Fig. 4.60). Dans le cas d'une inclusion diélectrique et magnétique avec  $\mu_\star \neq \mu_-$  et  $\varepsilon_\star \neq \varepsilon_-$  la matrice  $A$  est définie comme suit :

$$A = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star)$$

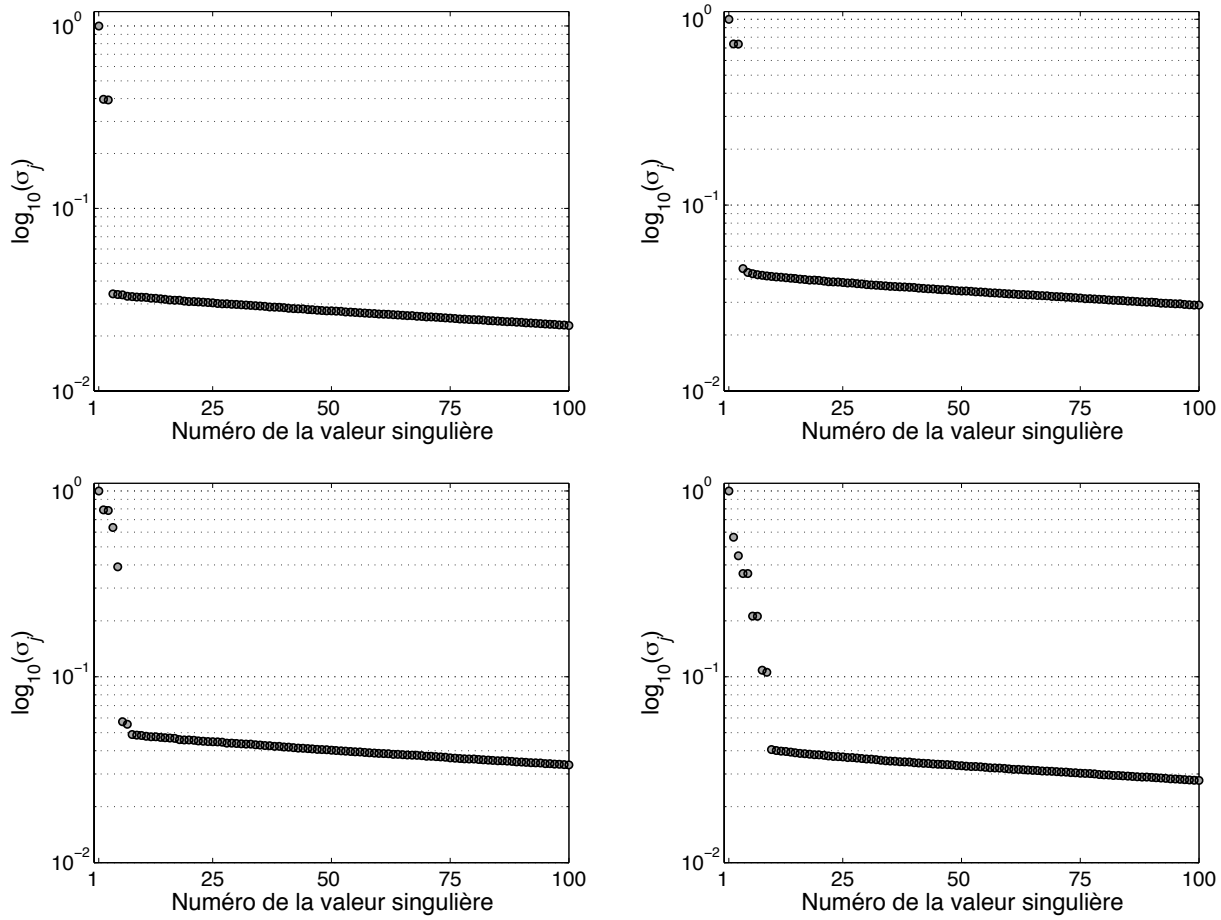


FIGURE 4.58 – La distribution des valeurs singulières de la matrice MSR avec un bruit de 10 dB de rapport signal sur bruit pour de rayons successifs (en haut à gauche)  $0,09 = 15\%\lambda$ , (en haut à droite)  $0,12 = 20\%\lambda$ , (en bas à gauche)  $0,18 = 30\%\lambda$  et (en bas à droite)  $0,24 = 40\%\lambda$ .

où  $\underline{\mathbf{M}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}^\varepsilon, \underline{\mathbf{M}}^\mu)$  et  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) = [\underline{\mathbf{G}}^\varepsilon, \underline{\mathbf{G}}^\mu](\mathbf{x}_\star)$ . Le produit inter-éléments  $G(\mathbf{x}_\star)$  est donné par

$$G(\mathbf{x}_\star) = [\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star)]^t \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_\star) = \begin{bmatrix} G^\varepsilon & H \\ H_* & G^\mu \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

où les éléments  $G^\varepsilon, G^\mu$  et  $H$  de  $G$  sont donnés par [37]

$$\begin{aligned} G^\varepsilon &= \mu_+ \mu_- \sum_{j=1}^n \overline{\underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_j)} \cdot \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_\star) \\ G^\mu &= -k_+^2 k_-^2 \sum_{j=1}^n \overline{\underline{\mathbf{G}}^{me,T}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_j)} \cdot \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{em',T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_\star) \\ H &= \sum_{j=1}^n \overline{\underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{r}_j)} \cdot \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{em',T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_\star) \end{aligned}$$

Rappelons que les dyades de Green sont connues dans le domaine spectral. A l'aide d'une transformée de Fourier 2D, on obtient les dyades dans le domaine spatial. A partir des équations

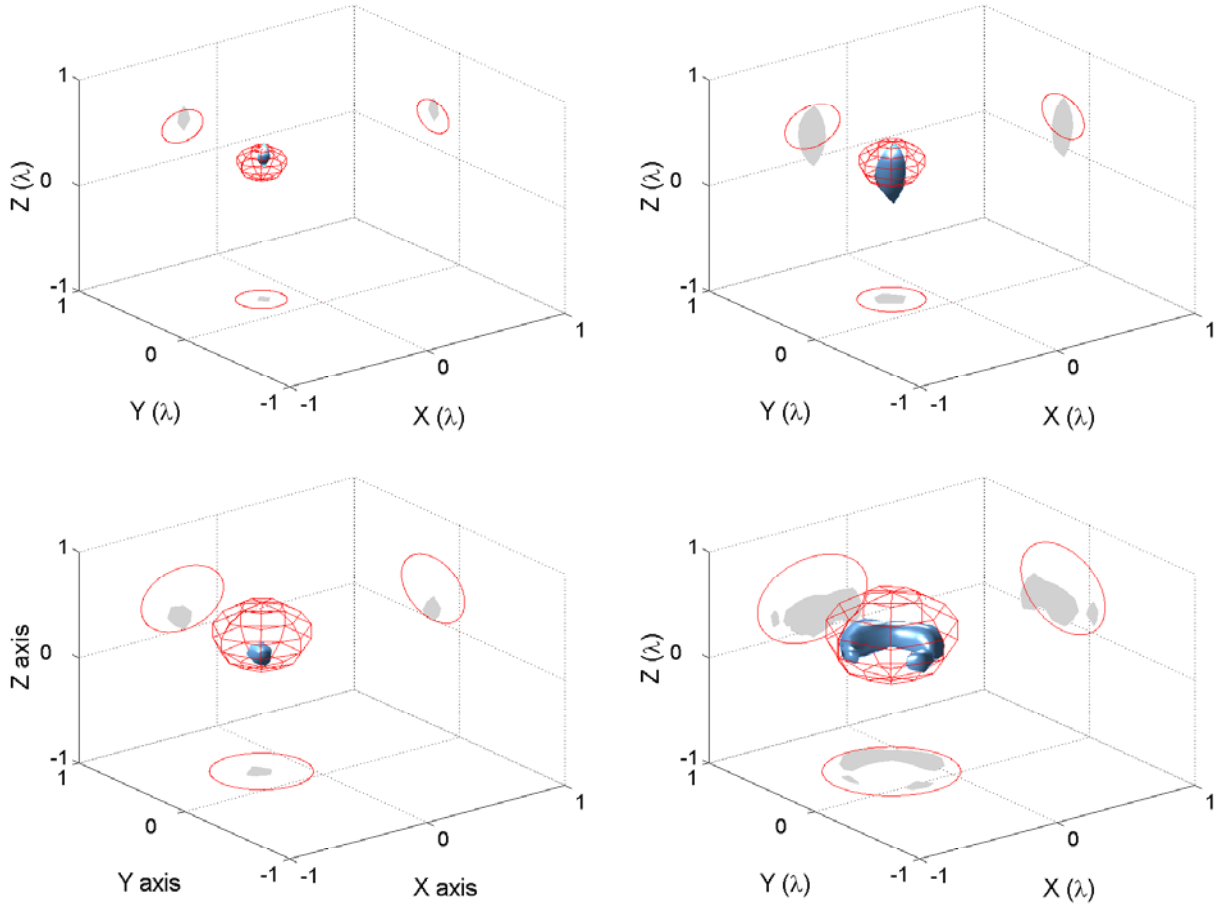


FIGURE 4.59 – Imagerie en 3D par l'algorithme MUSIC (60% isosurface) , en introduisant un bruit de 10 dB dans la matrice MSR calculée par la méthode CDM, pour des rayons successifs (en haut à gauche)  $0,09 = 15\%\lambda$  en utilisant les trois valeurs singulières non nulles, (en haut à droite)  $0,12 = 20\%\lambda$  en utilisant les trois valeurs singulières non nulles, (en bas à gauche)  $0,18 = 30\%\lambda$  en utilisant les cinq valeurs singulières non nulles et (en bas à droite)  $0,24 = 40\%\lambda$  en utilisant les neuf valeurs singulières non nulles (cf. Fig. 4.58).

(2.9), (2.17) et (2.5) citées dans le chapitre 2, on obtient les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 \mu_- \hat{z} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_\star) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s \mu_- \hat{z} \cdot \hat{\underline{\mathbf{G}}}^{ee,T}(\mathbf{k}_s, h, x_\star) e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s \mathbf{b}(\mathbf{k}_s) f_-(\mathbf{k}_s, h, x_\star) e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \\
 -k_-^2 \hat{z} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{em',T}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_\star) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s k_-^2 \hat{z} \cdot \hat{\underline{\mathbf{G}}}^{em',T}(\mathbf{k}_s, h, x_\star) e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s \mathbf{c}(\mathbf{k}_s) f_-(\mathbf{k}_s, h, x_\star) e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})}
 \end{aligned}$$

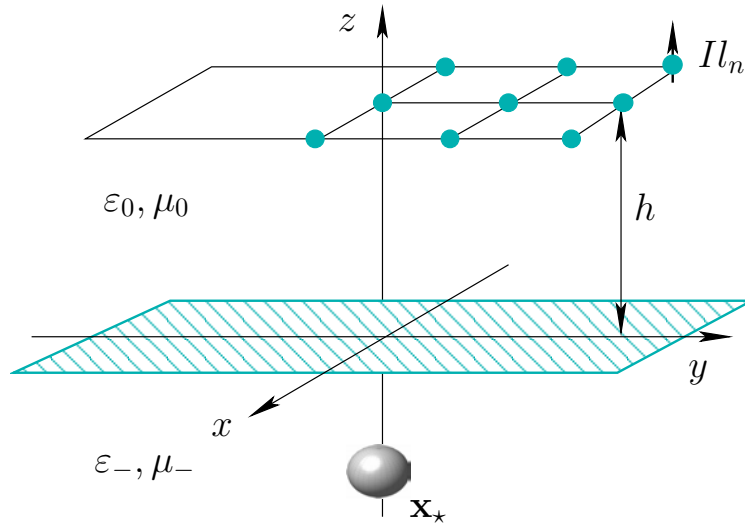


FIGURE 4.60 – Réseau linéaire d'émetteurs.

où le scalaire spectral  $f_{\pm}$  est donné par

$$f_{\pm}(\mathbf{k}_s, h, x_{\star}) = e^{\mp i(k_{z\mp} h - k_{z\pm} x_{\star})}$$

et les coefficients des dyades  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{k}_s) &= \frac{i}{\omega^2 a_0} \begin{bmatrix} -k_x k_{z-}, -k_y k_{z-}, k_s^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}(\mathbf{k}_s) &= \frac{k_-^2 \varepsilon_+}{a_0} \begin{bmatrix} -k_y, k_x, 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{k}_s = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y$ ,  $k_s = |\mathbf{k}_s|$ ,  $a_0 = \varepsilon_+ k_{z-} + \varepsilon_- k_{z+}$  et  $k_{z\pm} = \sqrt{k_{\pm}^2 - k_s^2}$ . Le signe plus dans (4.16) est choisi lorsque  $h < 0$  et  $x_{\star} > 0$ ; le signe moins est choisi si  $h > 0$  et  $x_{\star} < 0$ . Pour satisfaire la condition du rayonnement,  $\Re(k_{z\pm}) > 0$  et  $\Im(k_{z\pm}) > 0$  pour toutes les valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  dans l'intégrale.

Les représentations de Fourier de  $\mu_- \hat{z} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_{\star})$  et  $-k_-^2 \hat{z} \cdot \underline{\mathbf{G}}^{em',T}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_{\star})$  sont uniformément convergentes. A partir du principe de dualité, ces représentations peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_+ \underline{\mathbf{G}}^{ee,T}(\mathbf{x}_{\star}, \mathbf{r}) \cdot \hat{z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s \mathbf{b}^t(-\mathbf{k}_s) f_+(-\mathbf{k}_s, x_{\star}, h) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}'_s \mathbf{b}^t(\mathbf{k}'_s) f_-(\mathbf{k}'_s, h, x_{\star}) e^{i\mathbf{k}'_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \\ k_+^2 \underline{\mathbf{G}}^{me,T}(\mathbf{x}_{\star}, \mathbf{r}) \cdot \hat{z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}'_s \mathbf{c}^t(\mathbf{k}'_s) f_-(\mathbf{k}'_s, h, x_{\star}) e^{i\mathbf{k}'_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,\star})} \end{aligned}$$

Supposons que l'ouverture du réseau soit grande de telle sorte que le nombre de dipôles devienne grand et l'espacement entre les dipôles petit, alors on peut remplacer le produit des inter-éléments



$G^\varepsilon$ ,  $G^\mu$  et  $H$  par des intégrales sur l'ouverture du réseau. Soit  $\mathbf{N}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}_s, \mathbf{x}_{s,*}) = \mathbf{b}(\mathbf{k}_s) f_-(\mathbf{k}_s, h, x_*) e^{i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{x}_{s,*})}$ , on obtient

$$\begin{aligned} G^\varepsilon(h, x_*; k_+, k_-) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}_s d\mathbf{k}'_s d\mathbf{k}_s \mathbf{N}^*(\mathbf{k}'_s, \mathbf{r}_s, \mathbf{x}_{s,*}) \mathbf{N}(\mathbf{k}_s, \mathbf{r}_s, \mathbf{x}_{s,*}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s (\mathbf{b}^* \mathbf{b})(\mathbf{k}_s) (\bar{f}_- f_-)(\mathbf{k}_s, h, x_*) \\ G^\mu(h, x_*; k_+, k_-) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s (\mathbf{c}^* \mathbf{c})(\mathbf{k}_s) (\bar{f}_- f_-)(\mathbf{k}_s, h, x_*) \\ H(h, x_*; k_+, k_-) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s (\mathbf{b}^* \mathbf{c})(\mathbf{k}_s) (\bar{f}_- f_-)(\mathbf{k}_s, h, x_*) \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{b}^* \mathbf{b})(\mathbf{k}_s)$ ,  $(\mathbf{c}^* \mathbf{b})(\mathbf{k}_s)$  et  $(\mathbf{b}^* \mathbf{c})(\mathbf{k}_s)$  sont définis par

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}^* \mathbf{b})(\mathbf{k}_s) &= \frac{1}{|a_0|^2 \omega^4} \begin{bmatrix} k_x^2 |k_{z-}^2| & k_x k_y |k_{z-}^2| & -k_x \bar{k}_{z-} k_s^2 \\ k_x k_y |k_{z-}^2| & k_y^2 |k_{z-}^2| & -k_y \bar{k}_{z-} k_s^2 \\ -k_x k_{z-} k_s^2 & -k_y k_{z-} k_s^2 & k_s^4 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{c}^* \mathbf{c})(\mathbf{k}_s) &= \left| \frac{k_-^2 \varepsilon_+}{a_0} \right|^2 \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{c}^* \mathbf{b})(\mathbf{k}_s) &= \frac{i \bar{k}_-^2 \varepsilon_+}{\omega^2 |a_0|^2} \begin{bmatrix} k_x k_y k_{z-} & k_y^2 k_{z-} & -k_y k_s^2 \\ -k_x^2 k_{z-} & -k_x k_y k_{z-} & k_x k_s^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Une fois les expressions de  $G^\varepsilon$ ,  $G^\mu$  et  $H$  déterminées, on peut décomposer la matrice  $G$  comme suit :

$$G(h, x_*; k_+, k_-) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_s \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{k}_s) (\bar{f}_- f_-)(\mathbf{k}_s, h, x_*)$$

où le tenseur  $\underline{\mathbf{d}}(\mathbf{k}_s)$  est donné par

$$\underline{\mathbf{d}}(\mathbf{k}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^* \mathbf{b} \mathbf{b}^* \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^* \mathbf{b} \mathbf{c}^* \mathbf{c} \end{bmatrix} (\mathbf{k}_s)$$

Ces expressions sont obtenues pour un dipôle orienté verticalement selon l'axe  $z$  et une inclusion diélectrique-magnétique. A partir de la structure des tenseurs  $\mathbf{b}^* \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^* \mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}^* \mathbf{b}$ , on déduit que  $G^\varepsilon$ , qui représente la contribution diélectrique, est de rang 3 et que  $G^\mu$ , qui représente la contribution magnétique, est de rang 2. Puisque la matrice  $G$  de dimension  $6 \times 6$  est la somme des rangs de  $G^\mu$  et de  $G^\varepsilon$ , la matrice  $G$  est de rang 5.

## 4.11 Comportement des valeurs singulières

La fréquence de travail est de 300 MHz. On considère une inclusion sphérique diélectrique de rayon 0,05 m et de permittivité  $3\varepsilon_0$ . Cette inclusion est placée dans le milieu d'enfouissement de permittivité  $\varepsilon=12\varepsilon_0$  à une profondeur  $d = -1 \text{ m} = 2\lambda_-$ . Elle est éclairée par un réseau horizontal constitué par  $8 \times 8$  dipôles polarisés verticalement. L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ . On trace la distribution des valeurs singulières en fonction de la position de l'inclusion centrée en  $\mathbf{x}_* = (0; 0; -z_*)$  c'est-à-dire en faisant déplacer l'inclusion selon l'axe  $z$ .

**Effet de l'enfouissement pour  $h = \lambda_+/10$  :** Lorsque le réseau est proche de l'interface à une distance  $h = \lambda_+/10$ , la figure 4.61 nous montre que les deuxième et troisième valeurs singulières se surperposent lorsque  $z_* < 3\lambda_-$ , où  $z_*$  est la distance entre l'interface et le centre de l'inclusion. Lorsque  $z_* = 3\lambda_-$ , les trois valeurs singulières sont égales. Lorsque  $z_* > 3\lambda_-$  la première et la deuxième se trouvent identiques, et deviennent plus loin les valeurs singulières les plus observables. Ces deux valeurs décroissent plus lentement que la troisième valeur.

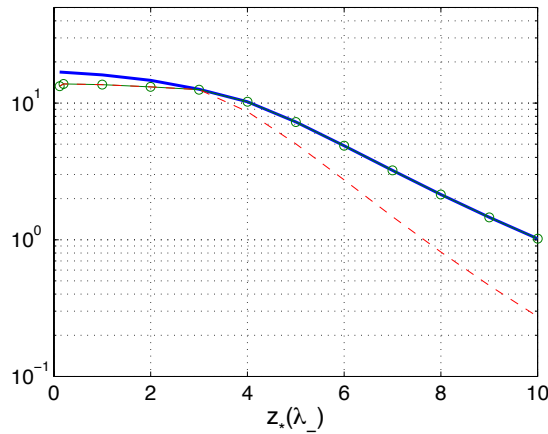


FIGURE 4.61 — Distribution des valeurs singulières en fonction de la profondeur de l'inclusion sphérique diélectrique pour un réseau éloigné de l'interface de  $\lambda_+/10$  en configuration demi-espace (ici le réseau est presque collé à l'interface).

**Effet du déplacement latéral pour  $h = \lambda_+/10$  :** Sur la figure 4.62, on déplace l'inclusion selon l'axe  $y$  par rapport au centre du réseau. On constate aussi que les deuxième et troisième valeurs singulières sont adjacentes lorsque la sphère est centrée par rapport au réseau et les trois valeurs singulières décroissent plus rapidement lorsqu'on éloigne la sphère latéralement par rapport à l'ouverture du réseau.

**Effet de l'enfouissement pour  $h = \lambda_+/2$  :** Dans cette simulation, on considère que le réseau se situe par rapport à l'interface à une distance de  $\lambda_+/2$  (donc plus éloigné de l'interface que la

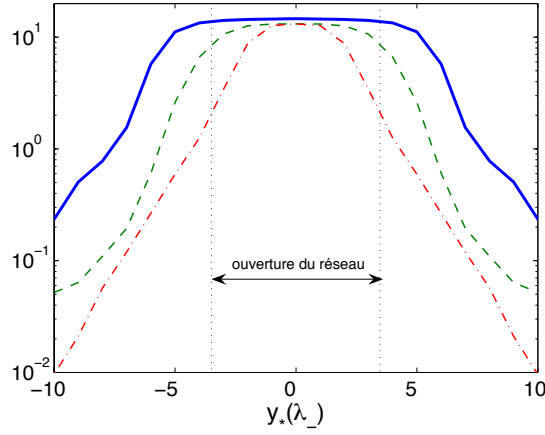


FIGURE 4.62 – Distribution des valeurs singulières en fonction de la position latérale  $y$  de l'inclusion sphérique diélectrique pour un réseau éloigné de l'interface de  $\lambda_+/10$  en configuration demi-espace (ici le réseau est presque collé à l'interface).

simulation précédente). On remarque à partir de la figure 4.63 que les deux premières valeurs se superposent et gardent le même comportement et que ces deux valeurs décroissent plus lentement et deviennent les plus observables (parce qu'elles dominent la troisième valeur singulière) lorsqu'on éloigne la sphère par rapport à l'interface.

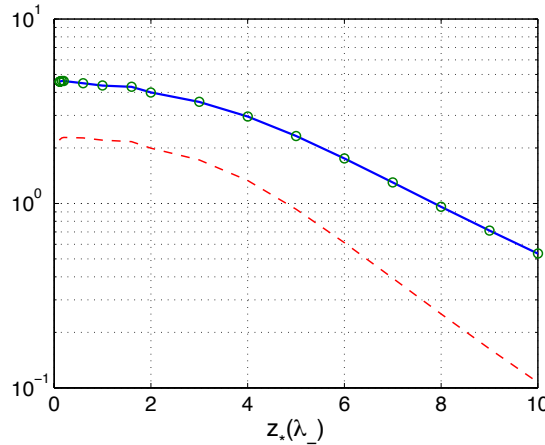


FIGURE 4.63 – Distribution des valeurs singulières en fonction de la position longitudinale  $z$  de l'inclusion sphérique diélectrique pour un réseau éloigné de l'interface de  $\lambda_+/2$  en configuration demi-espace (ici le réseau est assez loin de l'interface et n'y est plus quasi collé).

**Effet du déplacement transversal pour  $h = \lambda_+/2$  :** Sur la figure 4.64, on déplace l'inclusion selon l'axe  $y$  par rapport au centre du réseau. La distance entre le réseau et l'interface est de  $\lambda_+/2$ . On constate aussi que les deuxième et troisième valeurs singulières sont adjacentes lorsque la sphère est centrée par rapport au réseau et les trois valeurs singulières décroissent plus rapidement lorsqu'on éloigne la sphère latéralement par rapport à l'ouverture du réseau.

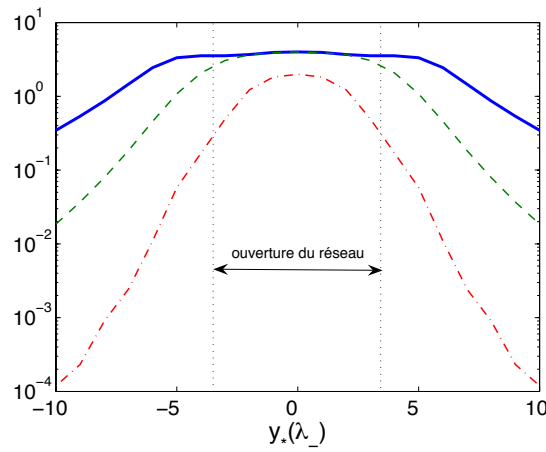


FIGURE 4.64 – Distribution des valeurs singulières en fonction de la position latérale  $y$  de l'inclusion sphérique diélectrique pour un réseau loin de l'interface de  $\lambda_+/2$  en configuration demi-espace (ici le réseau est loin de l'interface et  $n'y$  est plus quasi collé).

## 4.12 Reconstruction des inclusions en demi-espace

Supposons ici qu'un réseau de dipôles émetteurs/récepteurs polarisés verticalement est placé à une hauteur  $h$  par rapport à l'interface (placée en  $z=0$ ) et qu'il est symétrique par rapport à l'axe  $z$  (voir Fig. 4.65).

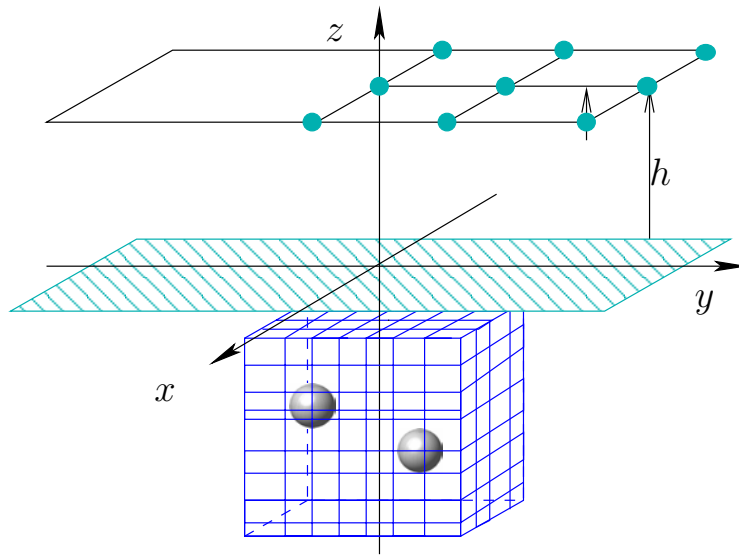


FIGURE 4.65 – Réseau plan d'émetteurs/récepteurs.

On considère dans les simulations suivantes une inclusion diélectrique de rayon 0.05 m. Cette inclusion est loin de l'interface, centrée à la position  $\mathbf{x}_* = (0.15 \text{ m}; 0.23; d \text{ m})$ , et elle est illuminée par un réseau horizontal de  $8 \times 8$  dipôles électriques polarisés verticalement, émettant à une fréquence de 300 MHz ( $\lambda_+ = 1 \text{ m}$ ). Le champ diffracté est mesuré au niveau du même réseau de dipôles puisque les réseaux d'émetteurs et de récepteurs sont identiques, et ils sont placés dans le milieu supérieur

de permittivité  $\varepsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ . L'espacement entre deux rangées de dipôles est de  $\lambda_+/2$ . Les réseaux sont symétriques par rapport à l'axe  $z$ , et placés à une hauteur  $h = \lambda_+/2$  par rapport à l'interface. On prend un cube de recherche de dimension  $[2\lambda_-; 2\lambda_-; 2\lambda_-]$ . A chaque point du cube de recherche on calcule la dyade de Green (« exacte » ou approchée) observée par les récepteurs.

On obtient une matrice MSR de dimension  $64 \times 64$  qui est définie par  $A = \underline{\mathbf{G}}^\varepsilon(\mathbf{x}_\star) \underline{\mathbf{M}}^\varepsilon(\underline{\mathbf{G}}^\mu)(\mathbf{x}_\star)^t$ . Pour l'imagerie MUSIC, on décompose d'abord cette matrice en valeurs singulières, puis on trace toutes les valeurs singulières de cette matrice pour essayer de distinguer le sous-espace signal.

#### 4.12.1 Utilisation des dyades de Green « exactes »

Sur la figure 4.66, la distribution des valeurs singulières nous permet de bien distinguer le sous-espace signal (les trois valeurs les plus élevées) et le sous-espace bruit (les valeurs nulles). A l'aide d'une projection sur le sous-espace bruit ou signal on obtient une information sur la position de l'inclusion.

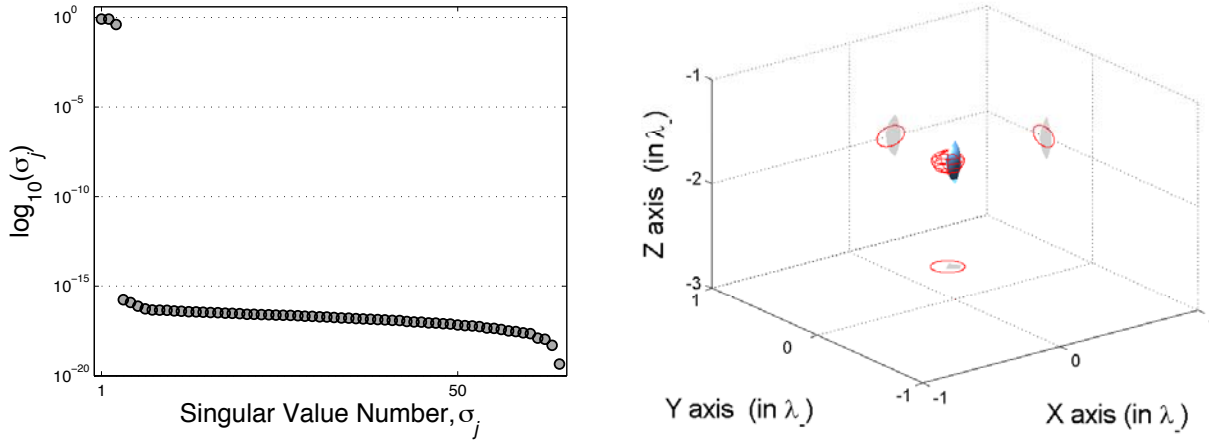


FIGURE 4.66 – (A gauche) distribution des valeurs singulières de la matrice MSR  $A$  de dimension  $64 \times 64$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -1 \text{ m})$ . (A droite) l'image obtenue (isosurface 60%) lorsqu'on applique l'algorithme MUSIC.

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé le champ diffracté calculé par la formule asymptotique à celui calculé par la méthode CDM et nous avons trouvé un pourcentage d'erreur sur la partie réelle de 10,78% et sur la partie imaginaire de 7,97%. Maintenant, nous allons comparer les deux spectres de valeurs singulières de la matrice MSR lorsqu'elle est calculée par les deux méthodes. On trace les deux spectres en fonction du nombre de valeurs singulières.

La figure 4.67 nous montre que le spectre est discontinu lorsqu'on utilise les données asymptotiques et il est plutôt continu à partir des données CDM. Le spectre est continu en CDM car l'inclusion est discrétisée en un ensemble d'éléments cubiques, chacun équivalent à un dipôle. Malgré la différence apparente au niveau des spectres des valeurs singulières, les deux matrices MSR

correspondant aux deux méthodes (asymptotique et CDM) donnent la même reconstruction de l'inclusion comme on le voit sur la figure 4.68.

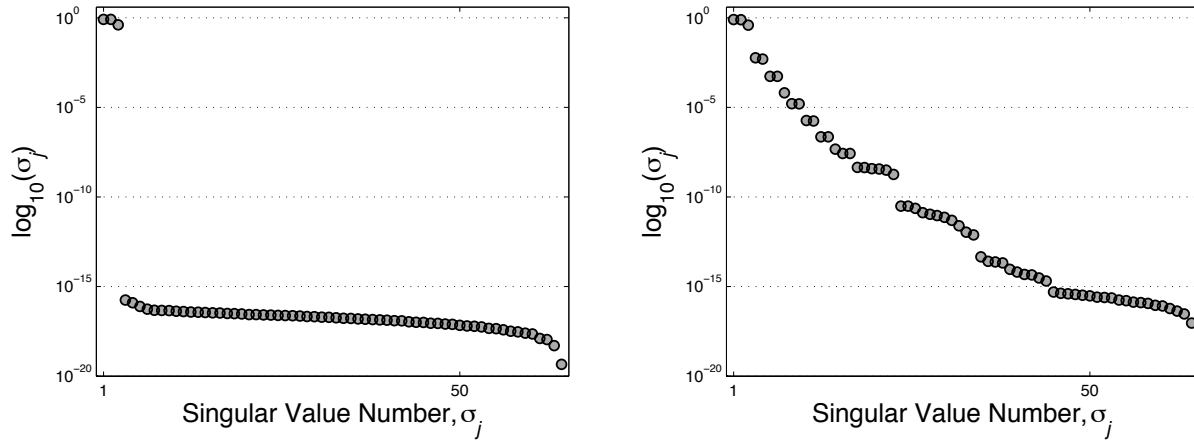


FIGURE 4.67 – Distribution des valeurs singulières de la matrice MSR  $A$  de dimension  $64 \times 64$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -1 \text{ m})$  en configuration demi-espace, (courbe gauche) données asymptotiques, (courbe droite) données CDM.

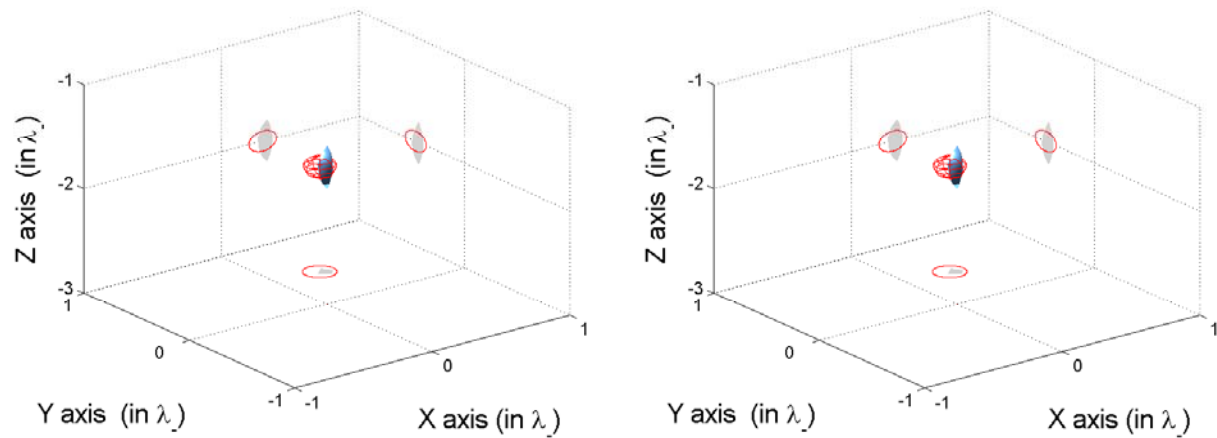


FIGURE 4.68 – Imagerie MUSIC (isosurface 60%) pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -1 \text{ m})$  (à gauche) avec les données asymptotiques non bruitées en prenant en compte les trois premières valeurs singulières. (A droite) avec les données CDM non bruitées en prenant en compte les trois premières valeurs singulières.

Dans cette simulation, on ajoute dans la matrice MSR un bruit gaussien de 10 dB de rapport signal sur bruit. La figure 4.69 représente deux spectres calculés par les deux méthodes. On constate que les valeurs singulières du sous-espace bruit ont augmenté et que les spectres deviennent presque identiques. Si l'on applique l'algorithme MUSIC on obtient les mêmes images, mais on observe que la résolution longitudinale se dégrade un peu (voir Fig. 4.73).

Maintenant, on rapproche l'inclusion de l'interface : on fixe la distance entre l'interface et le centre de la sphère à 0,2 m. On trace la distribution des valeurs singulières calculées par les deux

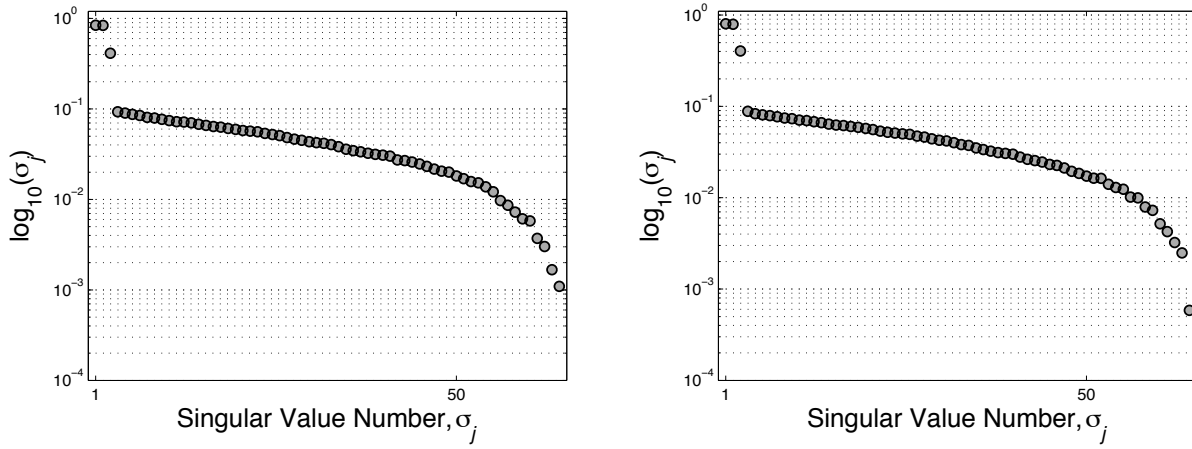


FIGURE 4.69 – La distribution des valeurs singulières avec introduction d'un bruit de 10 dB de rapport signal sur bruit dans la matrice MSR de dimension  $64 \times 64$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -1 \text{ m})$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

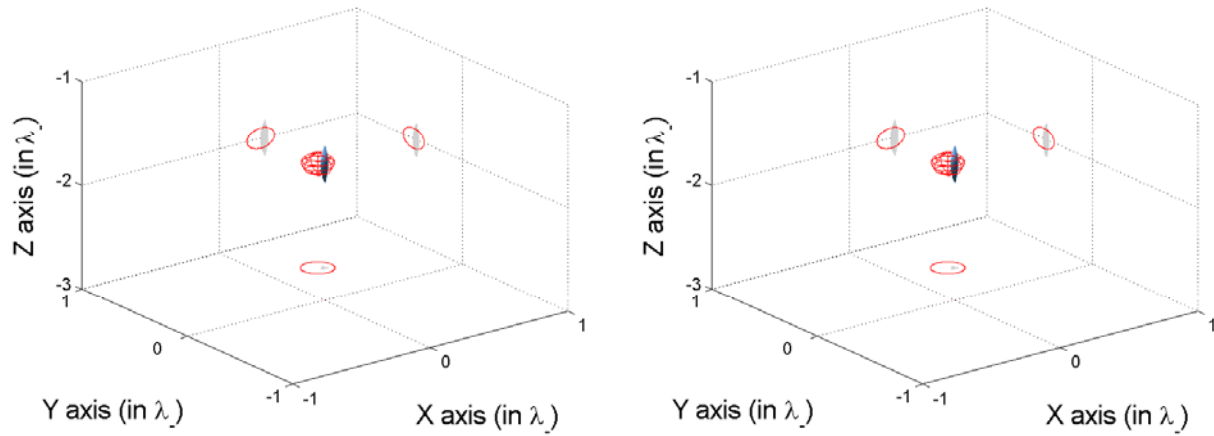


FIGURE 4.70 – Imagerie MUSIC (isosurface 80%) pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -0,1 \text{ m})$  (à gauche) avec les données asymptotiques bruitées à 10 dB en prenant en compte les 3 premières valeurs singulières. (A droite) avec les données CDM bruitées à 10 dB en prenant en compte les 3 premières valeurs singulières (cf. Fig. 4.69).

méthodes en introduisant dans la matrice MSR un bruit gaussien de 10dB de rapport signal sur bruit. La figure 4.71 représente deux spectres calculés par les deux méthodes. On constate que les spectres sont presque identiques. Si on applique l'algorithme MUSIC on obtient les mêmes images (voir Fig. 4.72).

#### 4.12.2 Utilisation des dyades de Green approchées

Dans les simulations précédentes, nous avons utilisé la dyade de Green « exacte » pour distinguer la position d'une inclusion proche ou loin de l'interface de  $2\lambda_-$  ou de  $2\lambda_-/5$ . Notons que le temps

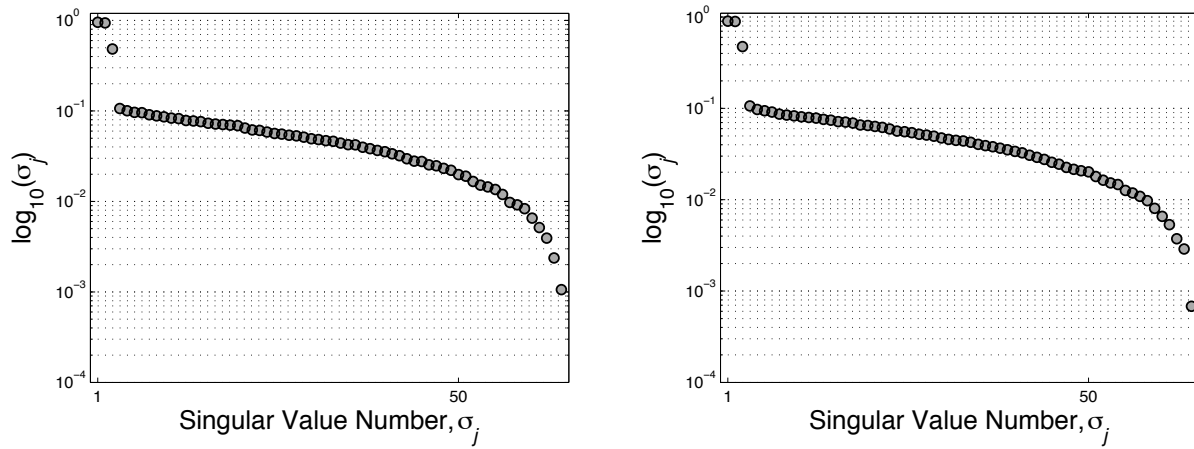


FIGURE 4.71 – La distribution des valeurs singulières avec introduction d'un bruit de 10 dB de signal sur bruit dans la matrice MSR de dimension  $64 \times 64$  pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -0,2 \text{ m})$ . (A gauche) à partir des données asymptotiques et (à droite) à partir des données CDM.

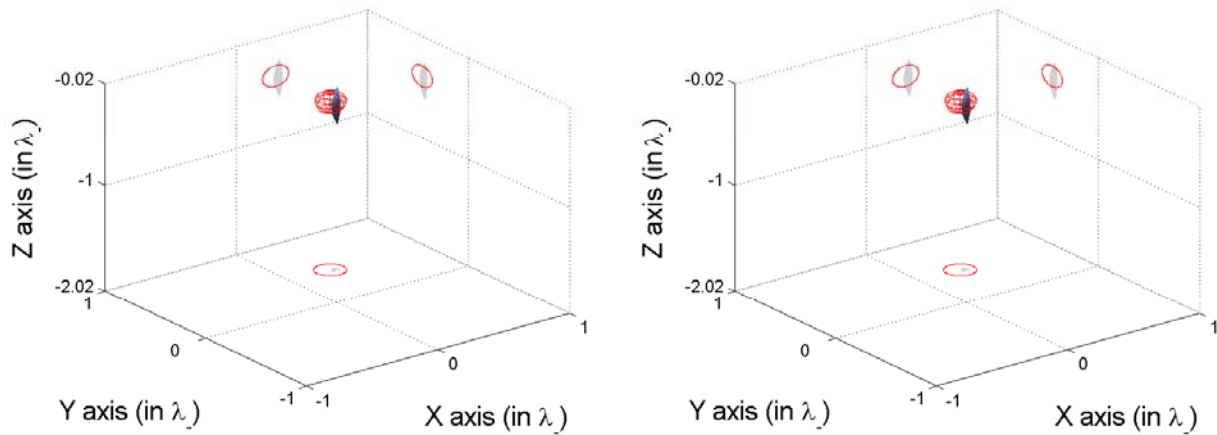


FIGURE 4.72 – Imagerie MUSIC (isosurface 80%) pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -0,2 \text{ m})$ , (à gauche) avec les données asymptotiques bruitées à 10 dB de rapport signal sur bruit en prenant en compte les trois premières valeurs singulières. (A droite) avec les données CDM bruitées à 10 dB de signal sur bruit en prenant en compte les 3 premières valeurs singulières (cf. Fig. 4.71).

de calcul de la dyade de Green est long, puisqu'on calcule à chaque point du cube de recherche de dimension  $[2\lambda_-; 2\lambda_-; 2\lambda_-]$  (de pas  $\lambda_-/10$ ) la dyade de Green qui décrit la propagation des ondes des  $8 \times 8$  dipôles récepteurs. Rappelons que, dans le chapitre 2, nous avons comparé trois méthodes approchées de calcul de la dyade de Green. Nous avons constaté que la méthode LOA est la méthode la plus rapide et qu'elle est la plus précise lorsque  $|z + z'| > \lambda$ . On reprend les simulations précédentes pour le cas d'une sphère diélectrique proche ou loin de l'interface de  $2\lambda_-$  ou de  $2\lambda_-/5$  en introduisant un bruit de 10dB de signal sur bruit dans la matrice MSR de dimension  $64 \times 64$  obtenue par la formule asymptotique et la méthode CDM. Les deux figures 4.73 et 4.74 nous montrent qu'on détecte la position de l'inclusion en utilisant la dyade Green approchée qui nous permet de gagner 50% du temps de calcul par rapport au Green « exact » mais on constate d'après ces deux figures que la résolution de l'imagerie en 3D se dégrade (sachant que les deux



images sont obtenues à une même iso-surface de 80%, que ce soit pour le cas de la simulation avec la dyade de Green exacte ou celle approchée).

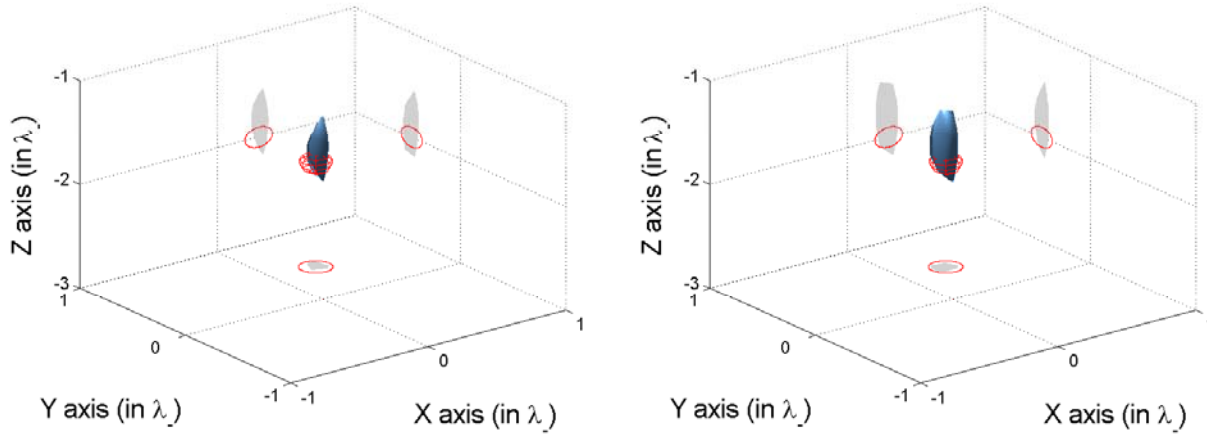


FIGURE 4.73 – Imagerie MUSIC (isosurface 80%) pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda_-/10$  à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -1 \text{ m})$  (à gauche) avec les données asymptotiques bruitées à 10 dB de rapport signal sur bruit en prenant en compte les trois premières valeurs singulières. (A droite) avec les données CDM bruitées à 10 dB de rapport signal sur bruit en prenant en compte les trois premières valeurs singulières.

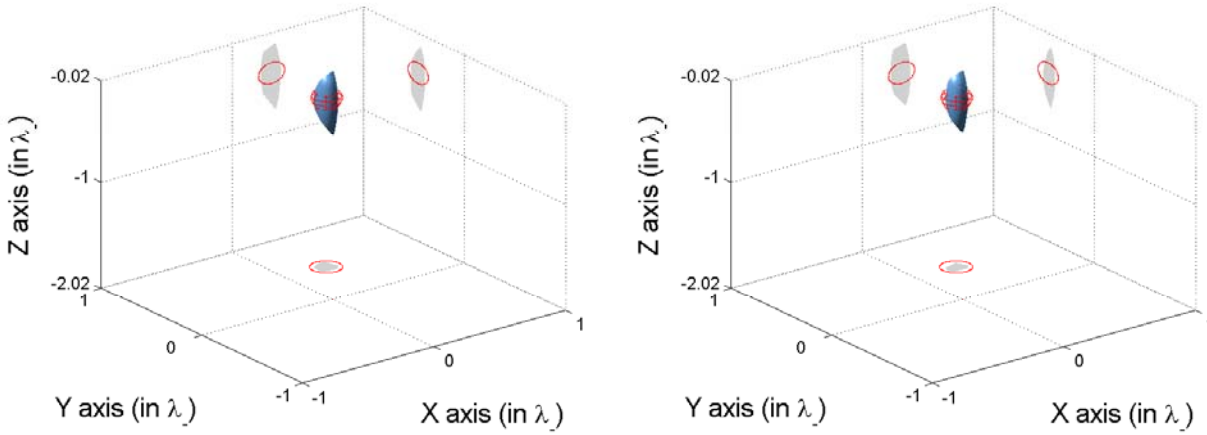


FIGURE 4.74 – Pour une sphère à la position  $(0,15 \text{ m}; 0,23 \text{ m}; -0.2 \text{ m})$ , comme en Fig. 4.72.

# Conclusion

L'objectif des travaux de cette thèse est de détecter et caractériser de petites inclusions enfouies à partir du champ électromagnétique diffracté calculé par la formule asymptotique.

Nous avons tout d'abord consacré le premier chapitre de ce manuscrit à l'exploitation de la formule asymptotique du champ diffracté par de petites inclusions ellipsoïdales (dont des sphères sont des cas particulier) diélectriques et ou magnétiques éclairées par une source rayonnante. Cette formule s'exprime en fonction de la dyade de Green et du tenseur de polarisation qui contient une information sur le contraste et le volume de l'objet.

Pour prendre en compte l'effet du couplage entre deux inclusions sphériques, nous avons introduit un nouveau tenseur de polarisation obtenu via une approche basée sur le système de coordonnées bisphériques. Nous avons alors comparé les éléments du tenseur de polarisation calculé dans le système des coordonnées bisphériques pour le cas de deux sphères identiques à celui d'une sphère isolée en espace libre, en faisant varier la distance séparant les centres des deux sphères. Nous avons constaté que nous pouvons ignorer l'effet du couplage à partir d'une certaine distance puisque les éléments du tenseur de polarisation calculé grâce aux coordonnées bisphériques deviennent identiques à celui d'une sphère isolée en espace libre. De même nous avons illustré le fait que la sphère de plus grand rayon possède une plus grande influence sur l'autre pour le cas de deux sphères de rayons différents et de même permittivité. Le même cas est observé pour deux sphères de même rayon et de permittivités différentes (et c'est la sphère ayant la plus grande permittivité qui influe le plus sur l'autre).

Pour le cas de plusieurs inclusions (c-à-d que le nombre d'inclusions est supérieur ou égal à deux), nous avons introduit le modèle Foldy-Lax. Pour étudier l'effet du couplage entre deux sphères, nous avons calculé la différence d'amplitude des composantes verticales du champ diffracté calculé par la formule asymptotique avec couplage, en utilisant les coordonnées bisphériques et de celui calculé avec le modèle Foldy-Lax, ou sans prise en compte du couplage, pour différentes distances entre les centres des deux sphères. Les simulations nous ont permis de constater que l'effet du couplage n'était visible qu'au voisinage proche des deux sphères. Rappelons ici qu'il ne faudra pas généraliser ce constat puisque notre cadre de travail reste les "petits objets", c'est-à-dire les objets à taille assez petite devant la longueur d'onde.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exploité la formule asymptotique du champ électromagnétique diffracté par de petites inclusions en configuration demi-espace au lieu de l'espace libre. Le changement le plus important est au niveau des dyades de Green. Dans nos simulations, nous nous sommes rendu compte que le temps de calcul de ces dyades était assez long à cause du calcul numérique des intégrales de Sommerfeld. Nous avons alors étudié les trois méthodes approchées de calcul de ces intégrales proposées par Chew et Cui. Nous avons constaté que la méthode dite LOA permet de diminuer considérablement le temps de calcul mais cette méthode ne marche bien que lorsque l'émetteur et le point d'observation sont à plus d'une longueur d'onde de distance.

Dans la formule asymptotique, l'effet du couplage entre l'interface et les inclusions est ignoré, c-à-d que les inclusions sont considérées assez éloignées de l'interface. Pour prendre en compte l'effet du couplage entre un objet sphérique enfoui et l'interface, nous avons fait intervenir un nouveau tenseur de polarisation calculé par une approche basée encore une fois sur le système de coordonnées bisphériques. Pour analyser le comportement des éléments du tenseur de polarisation, nous avons comparé les éléments calculés via les coordonnées bisphériques à ceux calculés pour une sphère isolée en espace libre pour différentes profondeurs d'enfouissement de la sphère par rapport à l'interface. Nous avons constaté qu'à partir d'une certaine distance l'effet du couplage entre la sphère et l'interface peut être ignoré, c-à-d que la sphère enfouie à une certaine profondeur diffracte l'onde incidente de la même manière qu'une sphère isolée en espace libre. Nous avons illustré le fait que plus la sphère est grande (tout en restant de taille assez petite devant la longueur d'onde d'enfouissement) plus l'effet du couplage entre la sphère et l'interface est important. Nous avons étudié l'effet du couplage entre la sphère et l'interface en comparant la différence d'amplitude de la composante verticale du champ diffracté calculé par la formule asymptotique avec et sans prendre en compte ce couplage. Nous avons constaté que son effet est ressenti fortement dans le seul voisinage de l'inclusion. Nous avons ainsi illustré que l'effet du couplage n'est ressenti au niveau du demi-espace supérieur que lorsque la sphère est très proche de l'interface.

Pour prendre en compte l'effet du couplage entre plusieurs objets enfouis et l'interface, nous avons introduit le modèle Foldy-Lax en configuration demi-espace. Nous avons remarqué que l'effet du couplage entre deux sphères enfouies et l'interface ne peut être ressenti au niveau du milieu supérieur que lorsque les inclusions sont de nouveau très proches de l'interface.

Dans le troisième chapitre, la validation de la formule asymptotique en espace libre et en demi-espace a été effectuée par une autre méthode appelée la « méthode des dipôles couplés » (CDM). La méthode CDM est une méthode numérique précise sous condition que les objets soient très bien discrétisés, ce qui a été le cas ici (les objets étaient déjà de petite taille et étaient discrétisés en plus de 4000 cubes élémentaires). La méthode CDM est donc pour nous la méthode « exacte » de calcul du champ diffracté.

Nos comparaisons ont porté sur le cas d'une sphère en espace libre (avec plusieurs simulations pour des rayons différents), sur le cas d'un ellipsoïde en espace libre et sur le cas de deux sphères couplées en espace libre puis en demi-espace. A chaque simulation, un taux d'erreur a été calculé, ce qui nous permet d'affirmer que la formule asymptotique à l'ordre  $\alpha^4$  ( $\alpha$  étant l'ordre de grandeur

de la taille de l'objet) fournit un champ diffracté acceptable jusqu'à un rayon de la sphère égal à  $\lambda/10$ . Les données exactes nous permettent aussi de confirmer l'analyse menée au premier chapitre concernant l'effet du couplage entre deux petites sphères. En effet, cet effet peut être ignoré. En configuration demi-espace, même si on rapproche une petite sphère de l'interface, l'effet du couplage avec l'interface peut être ignoré surtout si les capteurs sont disposés au niveau du demi-espace supérieur.

La méthode d'imagerie utilisée dans ce manuscrit est la méthode MUSIC. Nous avons appliqué cette méthode d'imagerie, non itérative et à une seule fréquence, pour détecter la position de chaque inclusion dans le quatrième chapitre. Ayant déjà souligné, dans les premiers chapitres, que l'effet du couplage pourrait être négligé dès que les récepteurs ne sont pas dans le voisinage immédiat des inclusions, nous avons calculé analytiquement la matrice MSR en nous basant sur la formule asymptotique simple (i.e., utilisant les tenseurs des inclusions supposées isolées et non couplées).

L'étude de cette matrice dans une configuration particulière (objet sphérique centré, champ lointain, réseau de dipôles assimilé à une ouverture) nous a permis de caractériser analytiquement ses valeurs singulières dans le cas d'une sphère diélectrique et/ou magnétique d'abord en espace libre et ensuite en demi-espace. Le comportement des valeurs singulières a été étudié en fonction de la permittivité de l'inclusion, de son rayon, de son enfouissement et de son déplacement latéral. L'imagerie par champ retropropagé a été présentée. Nous avons effectué une comparaison entre la résolution de l'imagerie par champ rétropropagé et l'imagerie MUSIC.

Nous avons mené des comparaisons entre les résultats de l'imagerie MUSIC lorsque la matrice MSR est calculée par la méthode CDM et par la formule asymptotique. Nous avons notamment constaté que les spectres sont nettement différents et qu'il suffit de prendre en compte un faible bruit additif gaussien à ces deux matrices pour avoir des spectres presque identiques.

Les cas traités sont une ou deux inclusions ellipsoïdales ou sphériques en espace libre ou en demi-espace. Nous avons illustré le fait que, pour le cas de deux sphères couplées, nous arrivons à distinguer la position de chaque sphère lorsque la matrice MSR est calculée avec ou sans prise en compte de l'effet du couplage. Nous avons présenté les simulations qui montrent que la prise en compte de l'effet du couplage dans le calcul de la matrice MSR n'améliore pas la résolution de l'imagerie. Dans le cas d'une seule inclusion ellipsoïdale inclinée, une fois la position détectée, nous proposons de ne considérer qu'une seule ligne d'émetteurs récepteurs, de la déplacer de telle sorte à la centrer au dessus du centre de l'inclusion et de faire une série de mesures en faisant pivoter la ligne sur l'axe vertical passant par l'inclusion. L'analyse du comportement des valeurs singulières en fonction de l'angle de rotation de la ligne de dipôles, permet de détecter l'angle d'inclinaison de l'ellipsoïde. Soulignons que l'étude ne couvre que le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati ou allongé. Dans le cas de deux sphères proches, nos simulations avec des matrices MSR bruitées ont montré que nous ne distinguons que trois valeurs singulières non nulles pour deux inclusions diélectriques au lieu de six et que l'algorithme MUSIC ne détecte qu'un seul diffracteur centré quelque part dans l'intervalle entre les deux positions réelles. Cette position estimée est proche du centre de la sphère qui possède le plus grand rayon équivalent.

## Perspectives de notre travail :

Nous avons étudié les caractéristiques des objets via leurs valeurs singulières et leurs vecteurs singuliers. Au vu des premières investigations, il semble intéressant de continuer dans cette direction et surtout dans l'analyse des vecteurs singuliers de la matrice MSR. Nous avons entamé une réflexion sur l'extension de la méthode MUSIC au cas d'objets étendus où la matrice MSR est calculée par la méthode CDM (puisque la méthode asymptotique n'est plus valable pour ce type d'objets).

D'un point de vue informatique, il serait intéressant de finaliser le code Matlab associé à l'ensemble des travaux de cette thèse et de l'intégrer au code MUSIC du laboratoire. J'avais aussi développé la méthode CDM sous Matlab mais je me suis heurtée à un problème de limitation de mémoire dès que la discrétisation dépasse 1000 cubes élémentaires. Il serait nécessaire de finaliser ce code CDM afin de pouvoir traiter au sein du laboratoire toute l'analyse relative à la méthode MUSIC appliquée aux objets étendus.

Notre travail peut s'étendre au cas d'inclusions anisotropes dans un milieu isotrope. Ce dernier cas a été envisagé très récemment par Y. Zhong et X. Chen. Il suffirait ici de calculer le tenseur de polarisation correspondant au cas d'inclusions anisotropes. Naturellement, il serait intéressant de se préoccuper de situations où le milieu de propagation est lui-même anisotrope. Le cas de composites uniaxiaux électriques, tels que rencontré dans des applications aéronautiques, composites multi-couches affectés de défauts localisés, en est un bon exemple. Une formulation de Lippmann-Schwinger peut en effet être introduite et une analyse asymptotique menée dans des termes voisins de celle actuelle, la complexité essentielle du modèle résidant a priori dans le calcul des dyades de Green.

Le sujet de recherche traité trouve des applications intéressantes comme la localisation de petites cibles enfouies dans un sous-sol et le contrôle non destructif (CND) de structures métalliques artificielles pour localiser des zones corrodées, des défauts ou des fissures. Le CND est un sujet qui a bénéficié de recherches menées au sein du laboratoire L2S (en partenariat avec le CEA LIST notamment), particulièrement celles basées sur des méthodes en courants de Foucault. Reste dans ce cas à élargir l'analyse mathématique au régime de diffusion (ce qui en théorie ne pose pas de difficultés particulières, même si nous avons essentiellement accès à des variations d'impédance de sondes), mais surtout à prendre en compte les configurations de test particulières de ce domaine du CND, qui peuvent ne pas fournir des données suffisantes.

En parallèle à ces travaux de thèse, portant sur la caractérisation électromagnétique en 3-D de petites inclusions enfouies, W. K. Park (qui conclura sa thèse au L2S et au CMAP début 2009) traite de la caractérisation d'écrans minces dans une situation 2D de diffraction scalaire, écrans pénétrables ou non. Dans ce cas, outre des images efficaces obtenues par une méthode MUSIC, un lien entre le nombre de valeurs singulières de la matrice de diffraction et la longueur de l'écran a été mis en avant de manière heuristique, ce qui pourrait donner des éléments pour le cas d'objets étendus.

---

Le sujet que j'ai traité durant ces trois dernières années est passionnant. Je compte approfondir mes connaissances dans ce domaine et m'ouvrir sur d'autres aspects lors de mon post-doctorat à CMAP et L2S, qui débute au mois d'octobre 2008, dans le cadre du RTRA DIGITEO, et qui porte sur l'imagerie MUSIC en régime temporel.



# Annexe A

## Distribution des vecteurs singuliers

Pour fixer le sous-espace signal ou le sous espace-bruit, il suffit de choisir le nombre de valeurs singulières non nulles à partir de la distribution des valeurs singulières de la matrice MSR. Est-ce qu'il serait possible de distinguer le sous-espace bruit du sous-espace signal à partir des distributions des vecteurs singuliers ?

Dans le chapitre 4, nous avons tracé seulement la distribution des vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières non nulles. Ici, nous allons tracer aussi la distribution des vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières nulles pour voir s'il est possible d'extraire le sous-espace bruit à partir des vecteurs singuliers, puisque les vecteurs singuliers contiennent une information sur la position de chaque inclusion. En effet les vecteurs singuliers représentent des courants qui, une fois appliqués aux dipôles émetteurs, vont générer une onde dont on attend qu'elle converge (dans un certain sens) à la position de chaque inclusion.

### A.1 Cas d'une inclusion diélectrique

On considère une inclusion sphérique diélectrique de rayon  $\lambda/20$  et de permittivité relative 5. Cette inclusion est à la position  $(-0,15 \text{ m} ; 0,15 \text{ m} ; 0,175 \text{ m})$  et est illuminée par un réseau horizontal de  $21 \times 21$  émetteurs/récepteurs polarisés selon l'axe  $z$ . L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ . Le réseau est placé à une hauteur  $h = 3 \text{ m}$  par rapport à l'origine du repère.

#### A.1.1 Données asymptotiques

On commence tout d'abord par tracer la distribution des valeurs singulières de la matrice MSR calculée par la formule asymptotique du champ diffracté pour préciser le nombre de valeurs singulières non nulles associées aux vecteurs singuliers. Sur la figure A.1, on distingue clairement trois



valeurs singulières non nulles associées au sous-espace signal, les autres valeurs singulières étant associées au sous-espace bruit. Les trois vecteurs singuliers associés à ces trois valeurs singulières contiennent une information sur la position de la sphère.

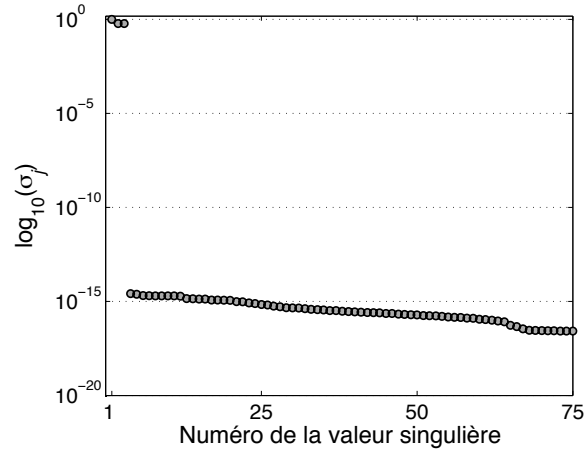


FIGURE A.1 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculées par la formule asymptotique pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$  à la position  $(-0, 15 \text{ m}; 0, 15 \text{ m}; 0, 175 \text{ m})$ .

On trace maintenant les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR calculée par la formule asymptotique pour voir si c'est possible de distinguer aussi le sous-espace bruit et signal à partir des vecteurs singuliers. Notons que les trois premiers vecteurs singuliers de la figure A.2 ressemblent aux trois composantes du champ rayonné par un dipôle à la position de l'inclusion mesurée sur le plan du réseau d'émetteurs/récepteurs. Pour les autres vecteurs singuliers, on constate qu'on obtient une information bruitée. On peut dire qu'on peut fixer aussi le sous-espace signal et bruit à partir des vecteurs singuliers qui sont associés aux valeurs singulières.

### A.1.2 Données CDM

On trace sur la figure A.3 la distribution des valeurs singulières de la matrice MSR calculée par la méthode CDM. La distribution obtenue est plus ou moins « continue ». Ceci peut être expliqué par le fait que l'objet est discrétisé en petits éléments cubiques et que chaque cube va rayonner (diffracter) selon ses trois moments dipolaires induits. Vu la continuité du spectre, nous nous retrouvons face à la difficulté du choix du nombre de valeurs singulières représentant le sous-espace signal contrairement à la méthode asymptotique.

On trace sur les figures A.4, A.5 et A.6 les 48 premiers vecteurs singuliers pour voir si c'est possible d'estimer le sous-espace signal et bruit. On constate que les trois premiers vecteurs singuliers ressemblent clairement aux trois premiers vecteurs singuliers qui sont obtenus par la formule asymptotique. On remarque que les 34 premiers vecteurs singuliers ont des formes géométriques particulières. On constate qu'à partir de la 34<sup>ème</sup> valeur singulière la distribution des valeurs sin-

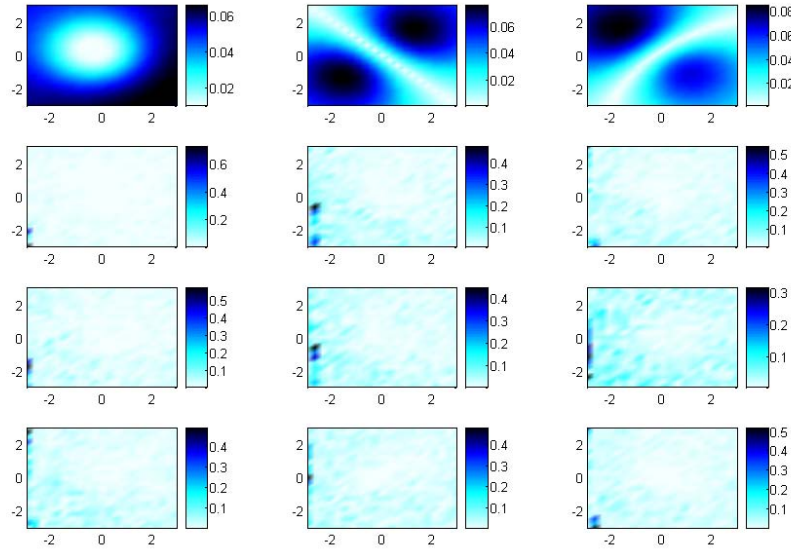


FIGURE A.2 – Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0, 15 \text{ m}; 0, 15 \text{ m}; 0, 175 \text{ m})$ .

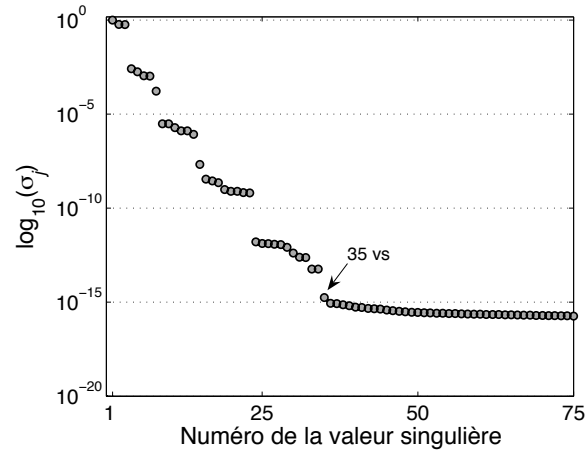


FIGURE A.3 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  calculée par la méthode CDM pour une sphère diélectrique de rayon  $\lambda/20$ .

gulières devient presque constante et quasi égale à zéro ( $< 10^{-15}$ ). Donc, on peut distinguer aussi le sous-espace bruit à partir des vecteurs singuliers.

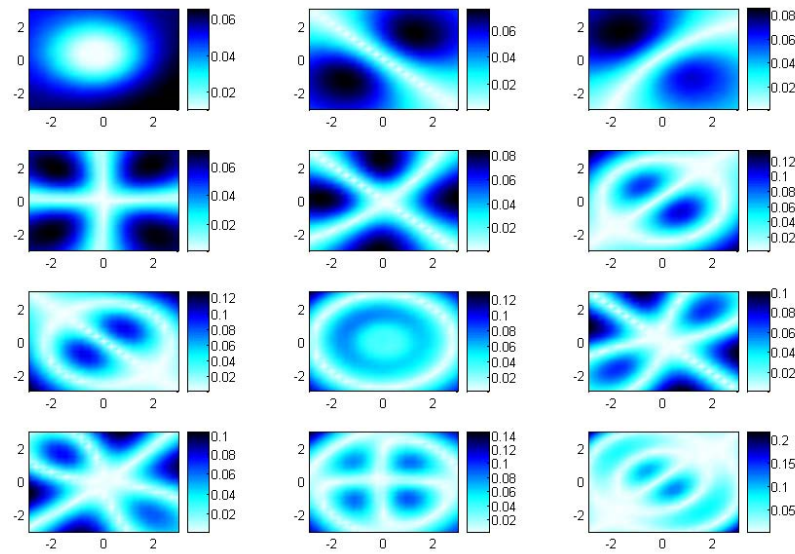


FIGURE A.4 – Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ .

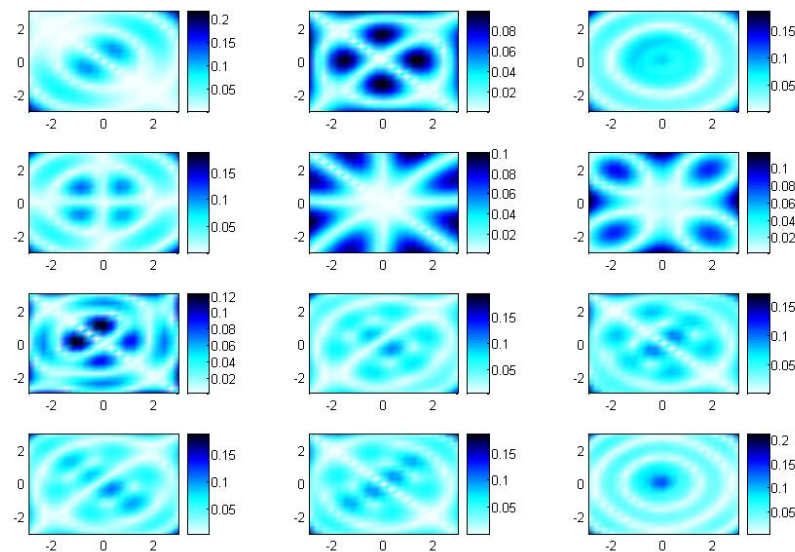


FIGURE A.5 – Du 13<sup>ème</sup> au 24<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ .

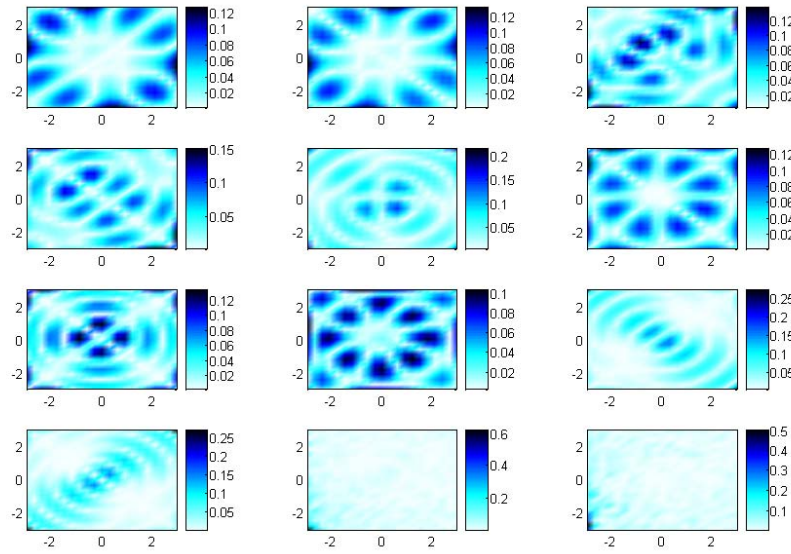


FIGURE A.6 – Du 25<sup>ème</sup> au 36<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ .

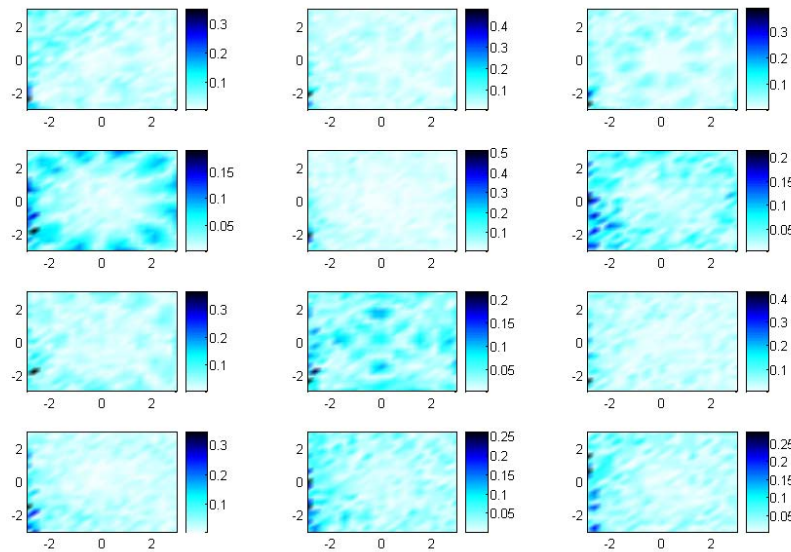


FIGURE A.7 – Du 35<sup>ème</sup> au 48<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour une sphère diélectrique à la position  $(-0,15 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,175 \text{ m})$ .

## A.2 Cas de deux inclusions diélectriques

On considère deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ . de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités  $5\varepsilon_0$  et  $3\varepsilon_0$ . Ces deux sphères sont illuminées par un réseau horizontal émetteurs/récepteurs de  $21 \times 21$  dipôles polarisés verticalement. Ce réseau est symétrique par rapport à l'axe  $z$ . Il est placé à une distance  $h = 3 \text{ m}$  par rapport à l'origine du repère. L'espacement entre les dipôles est de  $\lambda/2$ .

### A.2.1 Données asymptotiques

Dans la simulation de la figure A.8, on trace la distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR calculée à partir des données asymptotiques. On distingue six valeurs singulières non nulles.

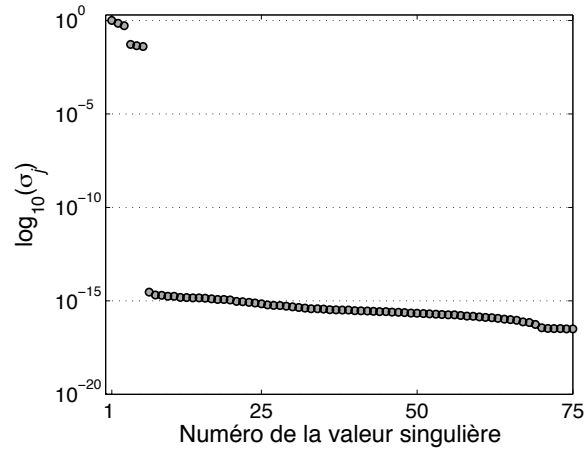


FIGURE A.8 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  obtenue par la formule asymptotique pour deux sphères diélectriques de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités  $(5\varepsilon_0, 3\varepsilon_0)$ .

Sur la figure A.9, on constate que les six premiers vecteurs singuliers ont une spécifique forme, alors que le reste des vecteurs singuliers sont contaminés avec un certain bruit.

On ajoute un bruit gaussien de 20 dB de rapport signal sur bruit dans la matrice MSR. Sur la figure A.10, on constate que le bruit a bien affecté tous les vecteurs singuliers. Cependant, les six premiers vecteurs gardent presque les mêmes valeurs par rapport au cas des données non bruitées.

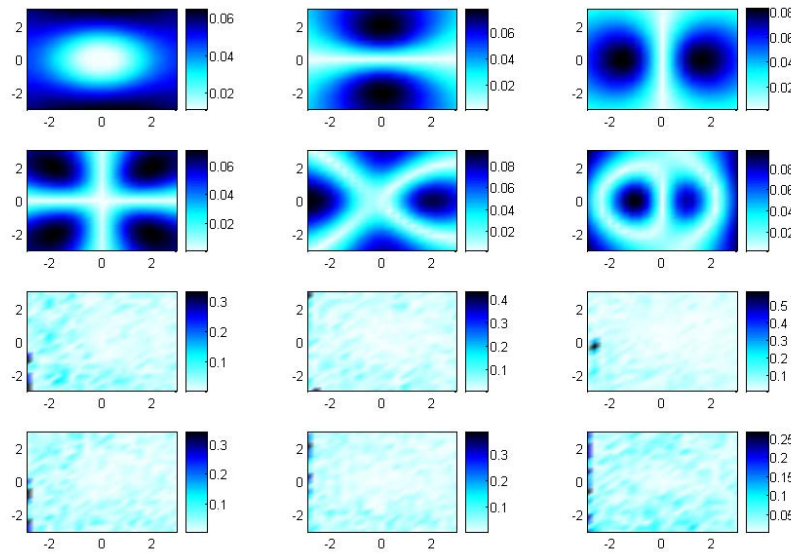


FIGURE A.9 – Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .

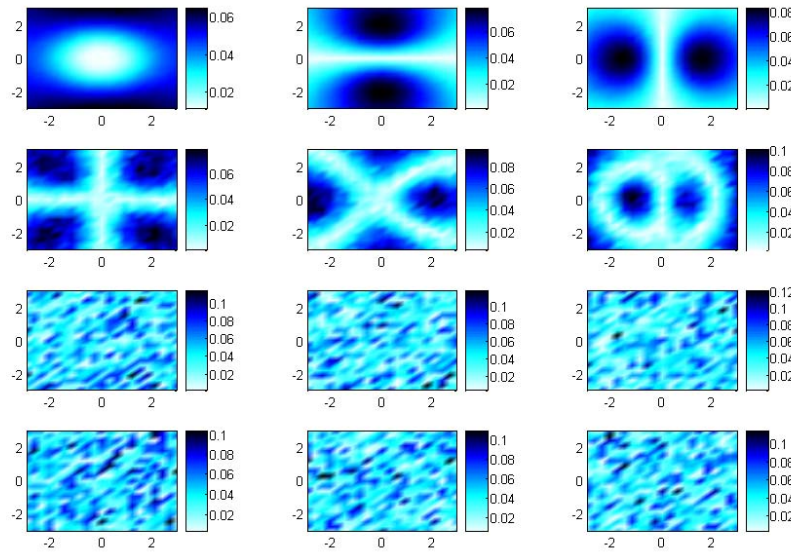


FIGURE A.10 – Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR avec un bruit gaussien à 20 dB de rapport signal sur bruit pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .

### A.2.2 Données CDM

A partir des données CDM, le nombre de valeurs singulières significatives n'est pas toujours facile à déterminer. Lorsque les valeurs singulières se stabilisent, les valeurs restantes sont d'habitude contaminées par un certain niveau de bruit et sont donc inutiles. Sur la figure A.11, on constate



qu'à partir de la valeur 50, la distribution des valeurs singulières devient constante, donc les 49 premières valeurs singulières peuvent être considérées comme étant les valeurs significatives.

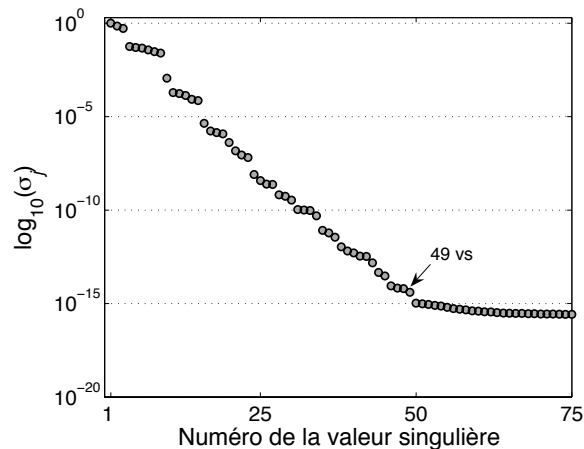


FIGURE A.11 – La distribution des valeurs singulières normalisées de la matrice MSR de dimension  $441 \times 441$  obtenue par la méthode CDM pour deux sphères diélectriques de même rayon  $\lambda/20$  et de différentes permittivités ( $5\varepsilon_0, 3\varepsilon_0$ ).

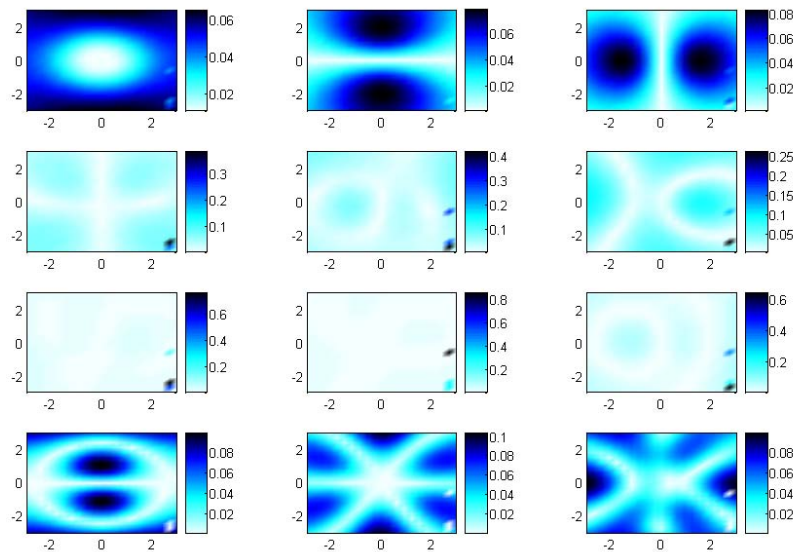


FIGURE A.12 – Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .

On ajoute du bruit gaussien à 20 dB de rapport signal sur bruit à la matrice MSR. La figure A.17 nous montre que le bruit a bien affecté tous les vecteurs singuliers. Cependant, les six premiers vecteurs gardent presque les mêmes valeurs par rapport au cas des données non bruitées.

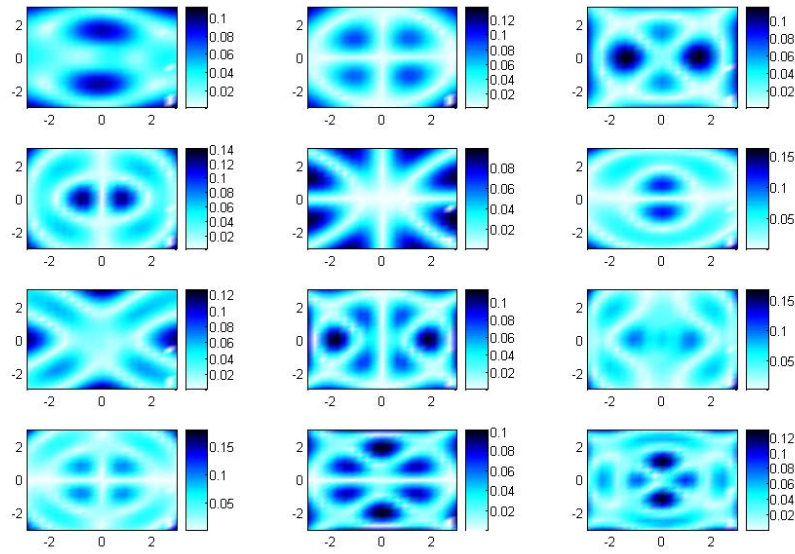


FIGURE A.13 – Du 13<sup>ème</sup> au 24<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .

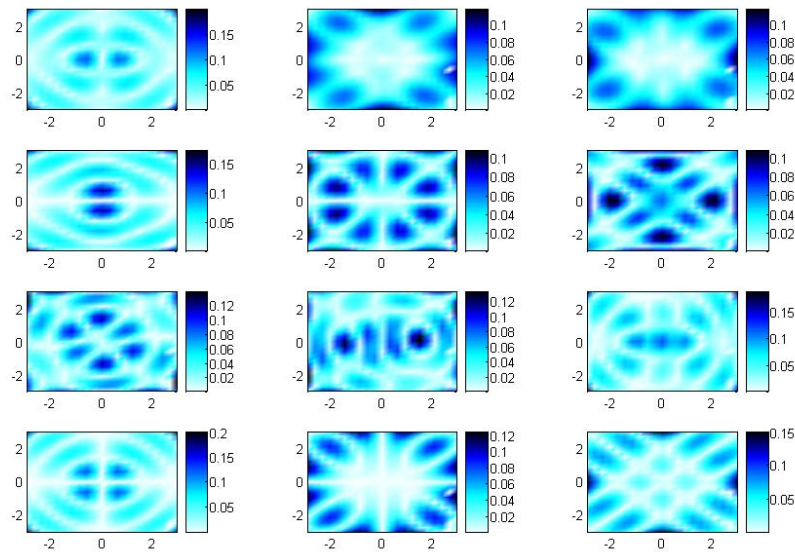


FIGURE A.14 – Du 25<sup>ème</sup> au 36<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .



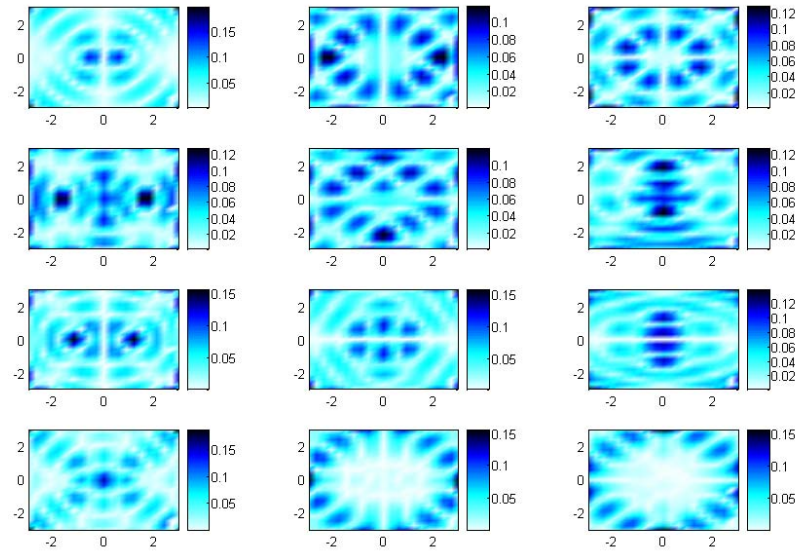


FIGURE A.15 – Du 37<sup>ème</sup> au 48<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$ .

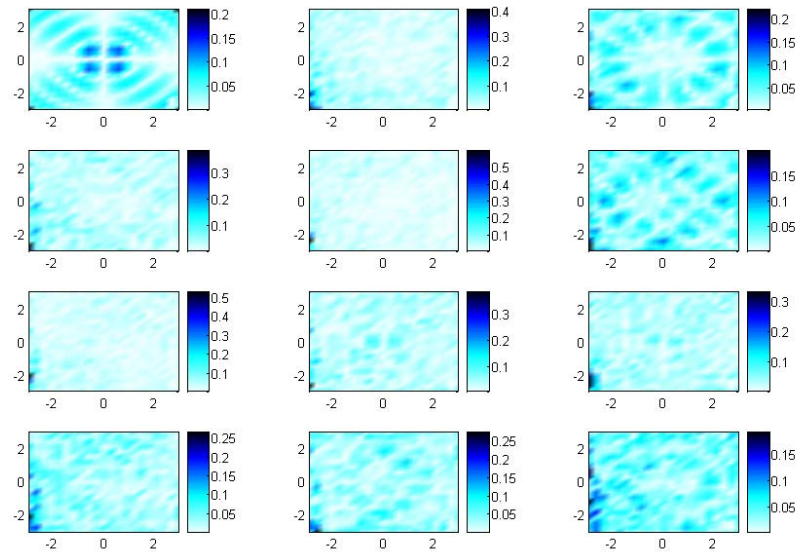


FIGURE A.16 – Du 49<sup>ème</sup> au 60<sup>ème</sup> vecteur singulier de la matrice MSR pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m} ; 0 ; 0,175 \text{ m})$ .

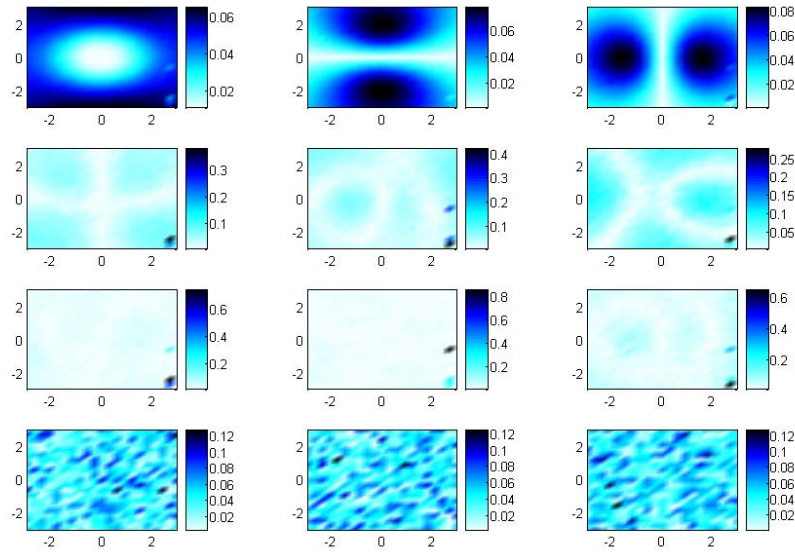


FIGURE A.17 — Les 12 premiers vecteurs singuliers de la matrice MSR à 20 dB de signal sur bruit pour deux sphères diélectriques aux positions  $(-0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$  et  $(0,075 \text{ m}; 0; 0,175 \text{ m})$ .



## Annexe B

# Interface de l'application Matlab

### B.1 Configuration

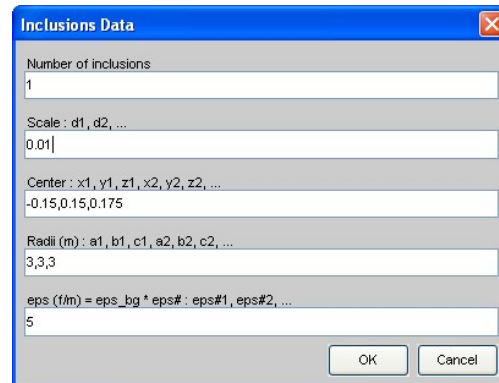
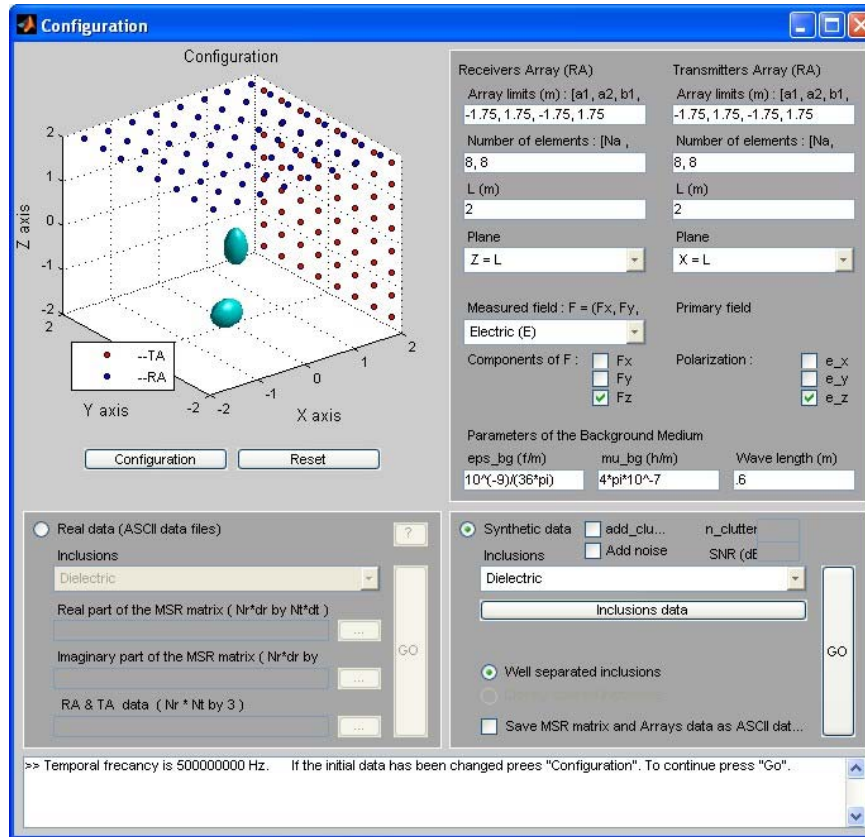
Dans cet annexe, nous allons présenter l'interface de notre application Matlab développée initialement par Ekaterina Iakovleva et reprise par moi-même.

Cette application nous permet de lancer nos simulations de détermination de la position de chaque inclusion en calculant la matrice MSR par la méthode asymptotique.

L'interface principale de l'application (voir figure [B.1](#)) permet d'introduire la configuration à simuler. En effet, elle permet de préciser : la fréquence de travail, les caractéristiques du milieu, la configuration du réseau émetteur : (le plan du réseau, (horizontal ou vertical), le nombre de lignes et de colonnes, l'espacement entre les dipôles émetteurs et l'orientation des dipôles (leur polarisation)), idem pour la configuration du réseau récepteur. En effet, il faut noter que l'application permet de simuler le cas général où les réseaux émetteurs et récepteurs ne sont pas identiques. D'ailleurs, la résolution de l'imagerie MUSIC s'améliore généralement lorsque ces réseaux ne sont pas identiques. On peut en sus préciser si la matrice MSR devra être calculée analytiquement par la méthode asymptotique ou si cette matrice est à lire à partir d'un fichier de données (dans le cas de données réelles ou de données simulées par une autre méthode comme par exemple la méthode CDM).

Une fois la configuration précisée, le bouton "Go" de cette interface permet de lancer les calculs.

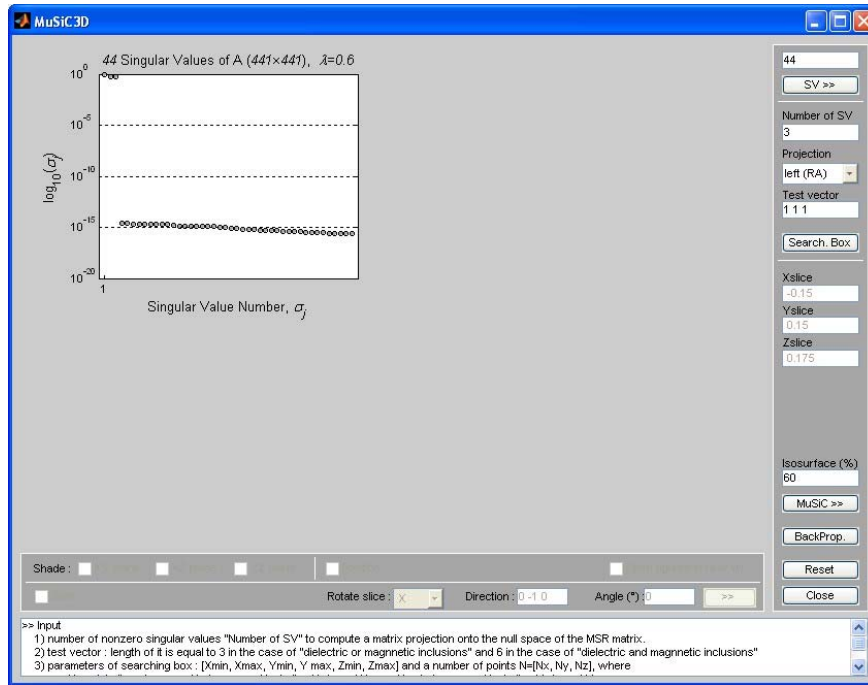
On clique sur "data inclusion", on obtient la [B.1](#) qui nous permet de fixer la position la taille et le contraste des inclusions.



## B.2 MUSIC

La simulation commence par le calcul de la matrice MSR si cela a été demandé en configuration, sinon la matrice MSR est chargée à partir du fichier de données précisé en configuration. Ensuite, le spectre des valeurs singulières est présenté selon une échelle logarithmique. Un mécanisme de "zoom" est utilisé pour essayer de bien distinguer les valeurs singulières non nulles. Une fois le nombre de valeurs singulières significatives saisi dans le champ "number of SV", nous précisons le type de projection à utiliser (projection droite, gauche, ou droite et gauche), le vecteur de test  $a$  et les paramètres du cube de recherche (la taille et le pas de maillage du cube).

En cliquant sur le bouton "MUSIC" on obtient les isosurfaces illustrées sur la figure B.2 qui sont une représentation en 3D de la région du cube de recherche où la fonction de coût de l'algorithme



Searching Box

Searching Box (limits) : Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, Zmin, Zmax  
-0.6 0.6 -0.6 0.6 -0.6 0.6

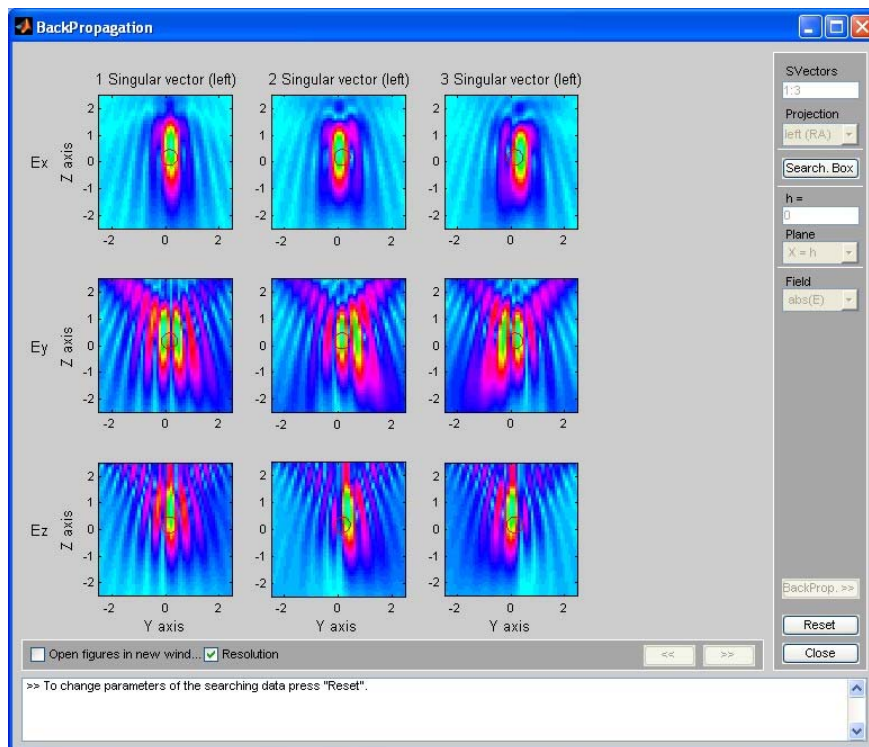
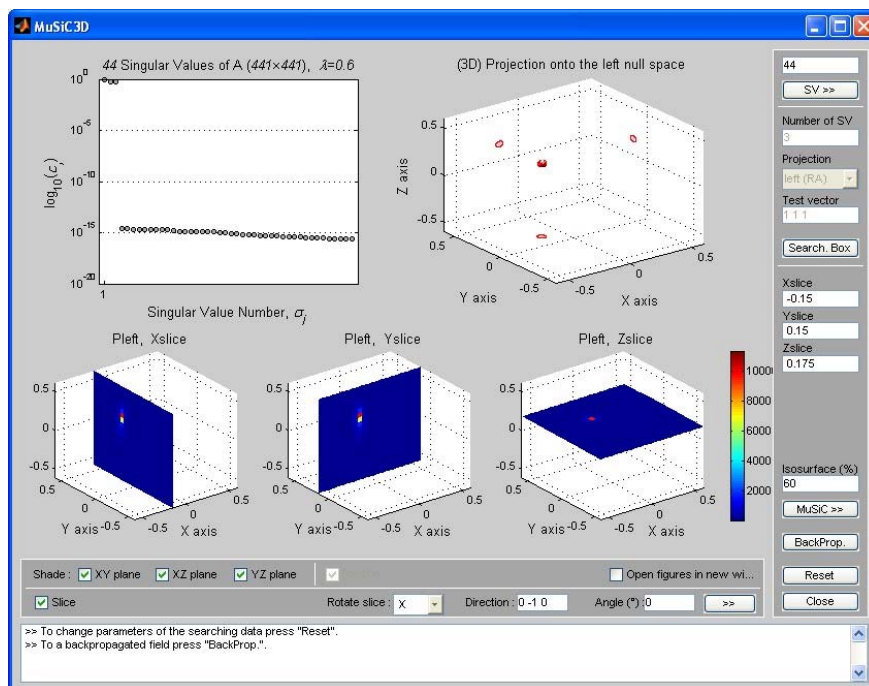
Nx, Ny, Nz  
21 21 21

OK Cancel

MUSIC atteint son maximum à un pourcentage d'isosurface près. Nous avons un moyen de régler ce pourcentage d'isosurface pour affiner l'analyse du résultat. Trois coupes, selon les trois axes principaux, permettent de voir une représentation plane de cette même fonction de coût. Notons que la position réelle des inclusions est indiquée sur les graphiques en cercles rouges pour pouvoir identifier visuellement si l'algorithme MUSIC a bien détecté les positions exactes.

## B.3 Champ rétropropagé

Un autre type de simulation est aussi intégré à cette application Matlab. En effet, on peut visualiser le champ retropropagé correspondant aux vecteurs singuliers choisis.



# Liste de publications

- Multi-static response matrix of a 3-D inclusion in a half space and MUSIC imaging, E. Iakovleva, S. Gdoura, D. Lesselier, G. Perrusson, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 2598-2609, Sept. 2007.
- Incorporation of multiple scattering and MUSIC-type imaging of small spheres, S. Gdoura et D. Lesselier, ESAIM Proceedings, Mathématiques pour l'imagerie, H. Ammari, Ed. à paraître.
- MUSIC-type imaging of a small dielectric sphere buried in a half-space from exact and asymptotic data, S. Gdoura, D. Lesselier, P. C. Chaumet, G. Perrusson, Imaging Microstructures : Mathematical and Computational Challenges, Ammari,H. and Kang,H., Contemporary Mathematics book series, AMS, à paraître.
- MUSIC-type imaging of dielectric spheres from single-frequency, asymptotic and exact array data, S. Gdoura, D. Lesselier, G. Perrusson, P. C. Chaumet, Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2007), Prague, Août 2007. *PIERS 2007 Prague Proc.*, Cambridge, E. Kong, Ed. The Electromagnetics Academy, pp. 348-352, 2007.
- MUSIC-type retrieval of 3-D inclusions in a half space from asymptotic field formulations, E. Iakovleva, S. Gdoura, D. Lesselier, G. Perrusson, 5ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, *NUMELEC'06*, Lille, Nov. 2006. Proc. CD-ROM, pp. 73-74
- MUSIC-type imaging of a small dielectric sphere buried in a half-space from exact and asymptotic data, S. Gdoura, D. Lesselier, P. C. Chaumet, G. Perrusson, *XXIXth URSI General Assembly*, Chicago, août 2008. Proc. 4 pp, à paraître.





# Bibliographie

- [1] H. Ammari, M. Vogelius et D. Volkov, "Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter II. The full Maxwell equations," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 80, pp. 769–814, 2001.
- [2] H. Ammari and H. Kang, *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1846, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [3] H. Ammari, E. Iakovleva, and D. Lesselier, "A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency," *Multiscale Modeling Simulation*, vol. 3, pp. 597-628, 2005.
- [4] H. Ammari, E. Iakovleva, D. Lesselier, and G. Perrusson, "MUSIC-type electromagnetic imaging of a collection of small three-dimensional bounded inclusions," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 29, pp. 674-709, 2007.
- [5] H. Ammari and H. Kang, *Polarization and Moment Tensors with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory*, Applied Mathematical Sciences Series, vol. 162, Springer-Verlag, 2007.
- [6] H. Ammari, R. Griesmaier, and M. Hanke, "Identification of small inhomogeneities : asymptotic factorization," *Math. Comput.*, vol. 76, pp. 1425-1448 2007.
- [7] H. Ammari, G. Dassios, H. Kang, M. Lim, "Estimates for the electric field in the presence of adjacent perfectly conducting spheres," *Quart. Appl. Math.*, vol. 65, pp. 339-355, 2007.
- [8] K. Belkebir, P.C. Chaumet, and A. Sentenac, "Influence of multiple scattering on three-dimensional imaging with optical diffraction tomography," *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 23, pp. 586-595, 2006.
- [9] D. H. Chambers and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109, pp. 2616-2624, 2001.
- [10] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Analysis of the time-reversal operator for a small spherical scatterer in an electromagnetic field," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, pp. 1729-1738, 2004.
- [11] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Target characterization using decomposition of the time-reversal operator : electromagnetic scattering from small ellipsoids," *Inverse Probl.*, vol. 22, pp. 2145-2163, 2006.
- [12] D. H. Chambers, "Target characterization using time-reversal symmetry of wave propagation," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 21, pp. 3511-3555, 2007.

- [13] A. Charalambopoulos, G. Dassios, M. Hadjinicolaou, "An analytic solution for low-frequency scattering by soft spheres," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 58, pp. 370-386, 1998.
- [14] A. Charalambopoulos, G. Dassios, G. Perrusson and D. Lesselier, "The localized nonlinear approximation in ellipsoidal geometry : a novel approach to the low-frequency scattering problem," *Int. J. Engineer. Science*, vol. 40, pp. 67-91, 2002.
- [15] P. C. Chaumet, and J.-P. Dufour, "Electric potential and field between two different spheres," *J. Electrostatics*, vol. 43, pp. 145-159, 1998.
- [16] P. C. Chaumet, A. Sentenac, and A. Rahmani, "Coupled dipole method for scatterers with large permittivity," *Physical Rev. E*, vol. 70, 036606, 2004.
- [17] M. Cheney, "The linear sampling method and the MUSIC algorithm," *Inverse Probl.*, vol. 17, pp. 591-595, 2001.
- [18] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, 2nd ed., IEEE Press, New-York 1995.
- [19] D. L. Colton, H. Haddar, and P. Monk, "The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 24, pp. 719-731, 2002.
- [20] T. J. Cui and W. C. Chew, "Efficient evaluation of Sommerfeld integrals for TM wave scattering by buried objects," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 12, pp. 607-657, 1998.
- [21] T. L. Cui and W. C. Chew, "Fast evaluation of Sommerfeld integrals for electromagnetic scattering and radiation by three-dimensional buried objects," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 37, pp. 887-900, 1999.
- [22] T. L. Cui and W. C. Chew, "Fast algorithm for electromagnetic scattering by 3-D buried objects of large size," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 37, pp. 2597-2607, 1999.
- [23] G. Dassios and R. E. Kleinman, *Low Frequency Scattering*, Oxford Univ. Press, London, 2000.
- [24] G. Dassios, M. Hadjinicolaou, G. Kamvyssas, and A. N. Kandili, "On the polarizability potential for two spheres," *Int. J. Engineer. Science*, vol. 44, pp. 1520-1533, 2006.
- [25] A.J. Devaney, "Super-resolution processing of multistatic data using time reversal and MUSIC," submitted to *J. Acoust. Soc. Am.*.
- [26] A.J. Devaney, E.A. Marengo, and F.K. Gruber, "Time-reversal-based imaging and inverse scattering of multiply scattering point targets," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, pp. 3129-3138, 2005.
- [27] A. J. Devaney, "Time reversal imaging of obscured targets from multistatic data," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53, pp. 1600-1610, 2005.
- [28] M. Fink and C. Prada, "Acoustical time-reversal mirrors," *Inverse Probl.*, vol. 17, pp. R1-R38, 2001.
- [29] S. Gdoura, D. Lesselier, G. Perrusson, and P. C. Chaumet, "MUSIC-type imaging of dielectric spheres from single-frequency, asymptotic and exact array data," pp. 348-352, *Proc. Progress In Electromagnetic Research Symposium (PIERS'2007)*, Kong, J. A. ed., Prague 2007.
- [30] F.K. Gruber, E.A. Marengo and A. J. Devaney, "Time reversal imaging with multiple signal classification considering multiple scattering between the targets," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 115, pp. 3042-3047, 2004.

- [31] B. Gebauer, M. Hanke, A. Kirsch, W. Muniz, and C. Schneider, "A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering," *Inverse Probl.*, vol. 21, pp. 2035–2050, 2005.
- [32] S. Hou, K. Solna, and H. Zhao, "Imaging of location and geometry for extended targets using the response matrix," *J. Computation Phys.*, vol. 199, pp. 317–338, 2004.
- [33] S. Hou, K. Solna, and H. Zhao, "A direct imaging algorithm for extended targets," *Inverse Probl.*, vol. 22, pp. 1151–1178, 2006.
- [34] S. Hou, K. Solna, and H. Zhao, "A direct imaging method using far-field data," *Inverse Probl.*, vol. 23, pp. 1533–1546, 2007.
- [35] E. Iakovleva, "Dyadic Green function for a half space," rapport L2S, novembre 2005.
- [36] E. Iakovleva and D. Lesselier, "On the MUSIC-type electromagnetic imaging of a small collection of 3-D dielectric spheres from its Multi-Static Response using exact and asymptotic numerical data," *Proc. 23rd Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*, Verona, March 2007, CD-ROM.
- [37] E. Iakovleva, S. Gdoura, D. Lesselier, and G. Perrusson, "Multi-static response matrix of a 3-D inclusion in half space and MUSIC imaging," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 55, pp. 2598–2609, 2007.
- [38] E. Iakovleva and D. Lesselier, "Multi-Static Response matrix of spherical scatterers and the back-propagation of singular fields," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 56, pp. 825–833, 2008.
- [39] N. Irishina, M. Moscoso, and O. Dorn, "Detection of small tumors in microwave medical imaging using level sets and MUSIC," *PIERS 2006 Cambridge Proc.*, The Electromagnetics Academy, Cambridge, pp. 43–47, 2006.
- [40] E.A. Marengo, F.K. Gruber and F. Simonetti, "Time-reversal MUSIC imaging of extended targets," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, pp. 1967–1984, 2007.
- [41] G. Micolau and M. Saillard, "DORT method as applied to electromagnetic subsurface sensing," *Radio Science*, vol. 38, pp. 1038–1049, 2003.
- [42] G. Micolau, M. Saillard, and P. Borderies, "DORT method as applied to ultrawideband signals for detection of buried objects," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 41, pp. 1813–1820, 2003.
- [43] P. Moon and D. Spencer, *Eleven Co-ordinate Systems, Field Theory Handbook*, Springer, Berlin 1961.
- [44] J. C. Mosher and R. M. Leahy, "Source localization using Recursively Applied and Projected (RAP) MUSIC," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 332–340, 1999.
- [45] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink, "Decomposition of the time reversal operator. Detection and selective focusing on two scatterers," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 99, pp. 2067–2076, 1996.
- [46] C. Prada and J. L. Thomas, "Experimental sub-wavelength localization of scatterers by decomposition of the time-reversal operator interpreted as a covariance matrix," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 114, pp. 235–243, 2003.

- [47] M. Pitkonen, "An explicit solution for the electric potential of the asymmetric dielectric double sphere," *J. Phys. D : Appl. phys.*, vol. 40, pp. 1483-1488, 2007.
- [48] <http://users.tkk.fi/mpitkone/Kaksoispallo/Kaksoispallo.html>
- [49] T. Setälä, M. Kaivola, A. T. Friberg, "Decomposition of the point-dipole field into homogeneous and evanescent parts," *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 1200-1206, 1999.
- [50] A. Sihvola, "Dielectric Polarization and Particle Shape Effects," *J. Nanomaterials*, Vol. 2007, pp. 5-5, 2007.
- [51] F. Simonetti, M. Fleming, and E. A. Marengo, "Illustration of the role of multiple scattering in subwavelength imaging from far-field measurements," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 25, pp. 292-303, 2008.
- [52] C. T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, 2nd edition, IEEE Press, New York, 1994.
- [53] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard, "Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering," *J. Electromagn. Waves Applic.*, vol. 13, pp. 687-719, 1999.
- [54] M. Vrancken, "Full wave integral equation based electromagnetic modelling of 3D metallic structures in planar stratified media," Catholic University of Leuven, Belgium, December 2002.
- [55] M. Vrancken and G. A. E. Vandenbosch, "Semantics of dyadic and mixed potential field representations for 3-D current distributions in planar stratified media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, pp. 2778-2787, 2003.
- [56] H. Wallén and A. Sihvola, "Polarizability of conducting sphere-doublets using series of images," *J. Appl. Phys.*, vol. 96, pp. 2330-2335, 2004.
- [57] H. Zhao, "Analysis of the response matrix for an extended target," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 64, pp. 725-745, 2004.
- [58] Y. Zhong and X. Chen, MUSIC imaging and electromagnetic inverse scattering of multiply scattered small anisotropic spheres, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 55, pp. 3542-3549, 2007.



## Résumé

L'objet de la thèse est la détection électromagnétique non-itérative de petits objets enfouis. Le problème direct est décrit en utilisant une formule asymptotique du champ diffracté par des inclusions dont la taille caractéristique est petite devant la longueur d'onde dans le milieu d'enfouissement. La prise en compte de la diffraction multiple dans le cas de deux inclusions sphériques est abordée grâce à un tenseur de polarisation spécifique calculé dans un système de coordonnées bisphériques. Le modèle Foldy-Lax est aussi utilisé afin de prendre en compte le couplage entre plusieurs inclusions. Les simulations numériques montrent que cet effet de couplage ne peut être ressenti qu'en leur voisinage immédiat. Une configuration d'enfouissement en demi-espace est aussi étudiée. Les dyades de Green sont calculées de manière exacte. Puis trois méthodes approchées de calcul des intégrales de Sommerfeld sont proposées, les simulations montrant qu'elles font gagner du temps dans le calcul de ces dyades. La prise en compte du couplage entre une sphère et l'interface est aussi investiguée grâce à un tenseur de polarisation adéquat en coordonnées bisphériques. A chaque fois, les champs diffractés simulés par la méthode asymptotique sont comparés à des champs obtenus par la méthode des dipôles couplés (CDM). Les résultats montrent que la méthode asymptotique fournit des valeurs du champ diffracté satisfaisantes tant que les tailles des inclusions restent très petites devant la longueur d'onde. L'algorithme d'imagerie MUSIC est quant à lui utilisé pour détecter ces inclusions à partir de leur matrice de réponse multistatique collectée au niveau d'un réseau plan limité de dipôles émetteurs-récepteurs. L'analyse des valeurs et des vecteurs singuliers montre qu'il y a une différence entre les données calculées par la méthode asymptotique et ceux calculées par la méthode CDM. Mais cette différence ne persiste pas si l'on considère des données bruitées. Dans les deux cas, MUSIC permet une bonne estimation de la position des inclusions, la notion de super-localisation étant en particulier discutée. Une méthode est par ailleurs proposée pour détecter l'angle d'inclinaison d'un ellipsoïde incliné.

## Abstract

The aim of this thesis is the electromagnetic non-iterative detection of small embedded objects. The direct problem is described by the asymptotic formula of the scattered field by inclusions whose size is much smaller than the wavelength in the embeded medium. Taking into account the multiple scattering in the case of two spherical inclusions is considered through a specific polarization tensor computed in a bispherical coordinate system. The Foldy-Lax model is also used to take into account the coupling between several inclusions. The numerical simulations show that this coupling effect is only felt in the near neighborhood. A half-space configuration is also studied. The Green dyads are calculated accurately. Then three approached methods to compute the Sommerfeld integral are proposed, the simulations showing that they save time in the calculation of these dyads. Taking into account the coupling between a sphere and the interface is also investigated with an adequate polarization tensor computed in a bispherical coordinate system. Each time, the scattered fields simulated by the asymptotic method are compared to fields obtained by the coupled dipole method (CDM). The results show that the asymptotic method provides satisfactory values of the scattered field when the size of inclusions are very smaller than wavelength. The imaging algorithm MUSIC is used to detect these inclusions from their multistatic response matrix collected by transceivers dipoles. Analysis of singular values and singular vectors shows that there is a difference between the data calculated by the asymptotic formula and those calculated by the CDM method. But this difference does not persist if one considers noisy data. In both cases, MUSIC algorithm allows to estimate the position of the inclusions, the notion of super-localization being particularly discussed. A method is also proposed to estimate the orientation of an ellipsoid.